Zadania úloh 44. ročníka MMO

1. deň

Úloha 1
Nech A je 101-prvková podmnožina množiny $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$. Dokážte, že existujú prvky $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ z množiny S také, že množiny

$$A_j = \{x + t_j : x \in A\} \text{ pre } j = 1, 2, \ldots, 100$$

sú po dvoch disjunktné.

Úloha 2
Nájdite všetky usporiadané dvojice prirodzených čísel (a, b) také, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je tiež prirodzené číslo.

Úloha 3
Je daný konvexný šesťuholník, v ktorom spojnica stredov protiľahlých strán je $\sqrt{3}/2$-krát dlhšia ako súčet ich dĺžok. Dokážte, že všetky vnútorné uhly tohto šesťuholníka sú rovnaké.

2. deň

Úloha 4
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Z bodu D spustíme kolmice na priamky AB, AC a BC, ktoré označíme po rade P, Q, R. Dokážte, že $|PQ| = |QR|$ práve vtedy, keď sa osi uhlov ABC a CDA pretnú na priamke AC.

Úloha 5
Nech n je prirodzené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú také reálne čísla, že $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

a) Dokážte, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \right)^2 \le \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

b) Dokážte, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 6
Nech p je prvočíslo. Dokážte, že existuje prvočíslo q také, že pre každé celé číslo n číslo $n^p - p$ nie je deliteľné q.