Riešenia súťažných úloh 2. série

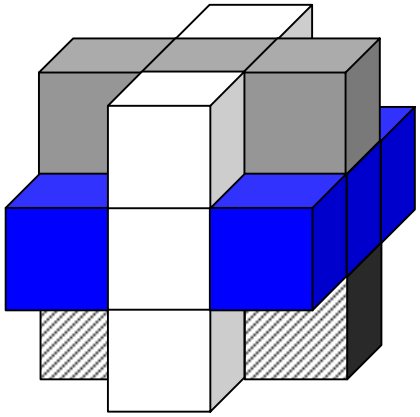
1. Alibaba stojí s veľkým mešcom mincí v rohu prázdnej pravouhlej jaskyne s rozmermi $m \times n$ políčok zafarbenej šachovnicovým spôsobom. Z ľubovoľného políčka môže urobiť krok na ľubovoľné zo štyroch susediacich políčok (ale nie po uhlopriečke). Pritom musí buď položiť 1 mincu na dané políčko, alebo si jednu mincu vziať, ak tam mince sú. Je možné, aby sa Alibaba pohyboval po jaskyni tak, aby na čiernych políčkach ostalo po jednej minci a na bielych mince neboli?

Riešenie: Najprv si uvedomíme, že ak jaskyňa pozostáva len z jedného čierneho políčka, Alibaba túto úlohu splniť nemôže. Ak má väčšiu jaskyňu, opíšeme postup, ako sa to dá urobiť. Keďže sa čierne a biele políčka pravidelne striedajú, môže prejsť všetky políčka šachovnice – jeho cesta bude mať tvar hada – prejde celý riadok, na jeho konci prejde do ďalšieho riadku a pôjde opačným smerom atď. Na začiatku stojí na políčku, kde minca nie je. Opíšeme postup, ako prejsť za sebou idúce prázdne políčka požadovaným spôsobom, ak máme k dispozícii ešte aspoň 4 miesta. Označme si ich A, B, C, D, Alibaba stojí na A. Ak je A biele, pričom tam minca nie je, tak urobí krok na B, položí mincu, urobí krok na C, položí mincu, urobí ďalší krok na D, položí mincu, vráti sa na C, zoberie mincu, príde na D a zoberie odtiaľ mincu. Teraz je na políčku D, ktoré je čierne a nie je na ňom minca. Počet správne označkovaných políčok (znamená to, že na tieto políčka sa už nebudeme vracať až na jednu výnimku na konci) stúpol o 2 (jedno biele a jedno čierne). To, aby na bielom políčku minca nebola, vie zabezpečiť, lebo ak na začiatku stojí na bielom, tak tam minca nie je, ak stojí na bielom po ukončení jednej série krokov, tak ak pôjde podľa tohto algoritmu, tak tam tiež minca nebude. Ak by bolo A čierne a nebola na ňom minca, tak pôjde na B, položí mincu, pôjde späť na A, položí mincu, ide na B, zoberie mincu. Teraz je na bielom políčku, pričom tam minca nie je. Zároveň stúpol počet políčok, ktoré sú už v požadovanom stave, o jedno čierne políčko. Takto postupuje, až kým sa nedostane do situácie, že do konca šachovnice sú max. 3 políčka (D, E, F). Ak je D biele, ide na E, položí mincu a končí. Ak sú políčka 3 a D je čierne, potom ide na E, položí mincu, ide na F, položí mincu, vráti sa na E, zoberie mincu, ide na D, položí mincu a koniec. Ak je situácia, že D je čierne a E tam je alebo nie je, tak sa vrátime o jedno kolo späť, čo bola situácia, keď sme mali políčka A, B, C, D, Alibaba bol na A, A je biele. Tu sa postup trochu zmení – z A pôjde na B, položí mincu, pôjde na C, položí mincu, vráti sa na B, zoberie mincu, vráti sa na C, zoberie mincu, pôjde na D, položí mincu a skončí. Takto sme vyčerpali všetky možnosti, ktoré môžu nastať.

Komentár a bodovanie: Ak ste zabudli na špeciálny tvar, keď má jaskyňa tvar jedného čierneho políčka, stratili ste 1 bod. Ak ste uviedli riešenie, ktoré bolo na konkrétnom príklade a bolo tam vidieť istý systém, mohli ste získať 1 až 2 body. Ak ste zabudli rozobrať koncové pokrývanie, stratili ste 2 body.

2. Z kocky rozmerov $3\times3\times3$ sme vybrali strednú kocku a osem vrcholových kociek. Je možné postaviť tento útvar zo šiestich hranolov s rozmermi $3\times1\times1$?

Riešenie: Riešenie je na obrázku:

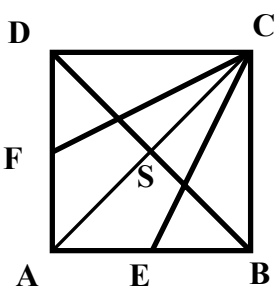


3. V jazere pláva jablko – dve tretiny sú pod vodou a jedna tretina nad vodou. K jablku priplávala ryba a priletel vták a začali ho v rovnakom čase hrýzť. Vták jablko hryzie dvakrát rýchlejšie ako ryba. Akú časť jablka zje ryba a akú vták?

Riešenie: Poloha jablka v tomto príklade nehrá žiadnu úlohu vzhľadom na to, že kým ešte jablko nie je úplne zjedené, tak istá časť je vždy nad vodou a istá pod vodou. Dôležitým je len pomer rýchlostí jedenia vtáka a ryby. Keďže tento pomer je 2:1, tak aj pomer zjedených častí jablka bude v tomto istom pomere. Preto vták zje dve tretiny jablka a ryba jednu tretinu.

Komentár a bodovanie: Za riešenie využívajúce konkrétne čísla a za približné riešenia ste získali maximálne 1 bod. Za nedostatočné zdôvodnenie toho, ako z pomeru rýchlostí vyplýva pomer zjedených častí, ste stratili 1-2 body. Ak ste vo svojom riešení sčítavali nekonečné rady, tak si treba dávať pozor na to, či tie rady majú konečné súčty, lebo inak nemá význam dva takéto rady odčítavať. Za opomenutie úvah ohľadom veľkosti spomínaných súčtov ste stratili 1 bod.

4. V štvorci $ABCD$ označme E, F stredy strán AB, DA. Dokážte, že úsečky CE, CF delia uhlopriečku BD na tri zhodné časti.



Riešenie: V trojuholníkoch ABC a ACD sú úsečky EC, FC ťažnicami. Označme prienik úsečky BD a AC ako S. Potom S je stredom úsečky AC aj BD. Preto je BS ťažnica v trojuholníku ABC, a teda je úsečkou CE delená na dve časti v pomere 1:2. Analogicky to platí aj v trojuholníku ACD. Ak si označíme ťažiská trojuholníkov ABC a ACD ako T_{ABC} a T_{ACD}, potom platí $|ST_{ABC}| = \frac{1}{3}|BS|$ a $|ST_{ACD}| = \frac{1}{3}|DS|$. Trojuholníky ABC a ADC sú zhodné, preto $|BS| = |DS|$.

Potom dostávame:

$$\left|BT_{ABC}\right| = \tfrac{2}{3}\left|BS\right|,$$

$$\left|T_{ABC}T_{ACD}\right| = \tfrac{1}{3}\left|T_{ABC}S\right| + \tfrac{1}{3}\left|ST_{ACD}\right| = \tfrac{2}{3}\left|ST_{ABC}\right| = \tfrac{2}{3}\left|BS\right|,$$

$$\left|T_{ACD}D\right| = \tfrac{2}{3}\left|DS\right| = \tfrac{2}{3}\left|BS\right|,$$

teda vyťaté úseky sú zhodné.

Komentár a bodovanie: Za nedostatočné zdôvodnenie podobnosti trojuholníkov ste stratili 2-3 body. Ak ste v svojom riešení využívali dokazované tvrdenie, získali ste maximálne jeden bod.

5. V športovom klube cvičí 100 kulturistov. Ich hmotnosti sú v rozmedzí 1 – 100 kg. Najmenej na koľko skupín ich musíme rozdeliť, aby nenastala situácia, že hmotnosť jedného z kulturistov z jednej skupiny sa rovná dvojnásobku hmotnosti niektorého iného kulturistu z tej istej skupiny?

Riešenie: Ak majú všetci rovnakú hmotnosť, tak nám zrejme stačí jedna skupina. Analogicky to platí aj v prípade, keď neexistuje dvojica kulturistov, ktorých hmotnosti by boli v pomere 1:2. Uvažujme teraz špeciálny prípad, keď majú všetci rôzne hmotnosti. Usporiadajme si ich takto: nech sa chytia za ruky tí, ktorých hmotnosti sú v pomere 1:2. Každý sa zrejme môže držať maximálne dvoch iných (jeden z nich bude mať polovičnú a druhý dvojnásobnú hmotnosť). Prípad, že by sme takto dostali uzavretú reťaz, nenastane, lebo najľahší z danej reťaze sa môže držať len s ťažším. Dostali sme takto niekoľko reťazí a niekoľko nezapojených (ktorých môžeme chápať ako jednočlenné reťaze). V každej reťazi priradíme najľahšiemu účastníkovi číslo 1, druhému najľahšiemu číslo 2 atď. Teraz utvoríme skupinu A, do ktorej dáme kulturistov s nepárnym číslom, do skupiny B dáme ostatných. Je zrejmé, že tieto skupiny spĺňajú požiadavky zo zadania. V poslednom (všeobecnom) prípade si z kulturistov rovnakej hmotnosti vyberieme jedného reprezentanta. Dostaneme tak skupinu reprezentantov, v ktorej má každý inú hmotnosť. Tento prípad sme už vyriešili a máme ich rozdelených do dvoch skupín A a B. Už nám ostáva len pridanie kulturistov rovnakej hmotnosti do skupiny k svojmu reprezentantovi. Preto nám stačia dve skupiny.

Komentár a bodovanie: Najčastejšou chybou bolo to, že ste uvažovali len s prirodzenými hmotnosťami. Za túto chybu ste stratili 2 body. Ak ste našli vhodné rozdelenie, získali ste tri body. Ak ste postupovali tak, že ste si zobrali jedného kulturistu a našli ste tých, ktorí majú dvojnásobnú a polovičnú hmotnosť a dali ste ich do druhej skupiny a potom ste šli na ďalšieho nezaradeného, získali ste maximálne 4 body, lebo týmto spôsobom nemáte zabezpečené dobré rozdelenie dlhších reťazí. (Skúste sa zamyslieť nad prípadom, že máte hmotnosti 1, 2, 4, 8 a 16. Do prvej skupiny dáte 2, do druhej 1, 4. Ak teraz pridáte do prvej skupiny 16, kam dáte 8?)

6. Zistite, či existuje slovo (konečná postupnosť písmen), v ktorom sa nenachádzajú dve rovnaké susedné podslová, ale také, že pridaním ľubovoľného písmena na jeho začiatok alebo koniec dostaneme slovo, ktoré už túto vlastnosť mať nebude.

Riešenie: Nech má naša abeceda n písmen. Uvažujme postupnosť slov A, ABA, ABACABA, ABACABADABACABA, ... Matematickou indukciou dokážeme, že n-té slovo spĺňa podmienky zadania. Pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé. Predpokladajme ďalej, že sme tvrdenie dokázali pre abecedy s dĺžkou 1, 2, ..., $n-1$, $n > 1$. Zostrojíme n-té slovo (ďalej ho označujme ako X_n) takto: napíšeme $(n-1)$-vé slovo X_{n-1}, zaň napíšeme n-té písmeno abecedy a nakoniec zase $(n-1)$-vé slovo X_{n-1}: $\overline{X_{n-1} n X_{n-1}}$. Najprv dokážeme, že takéto slovo neobsahuje rovnaké susedné podslová. Vzhľadom na indukčný predpoklad vieme, že v prípade, že sa tam takáto dvojica nachádza, tak určite musí obsahovať n-té písmeno (inak dostávame spor s predpokladom, že $(n-1)$-vé slovo X_{n-1} vyhovuje podmienkam zadania). Ale n-té písmeno sa v X_n nachádza len raz, teda v X_n sa nenachádza dvojica rovnakých susedných podslov. Teraz ukážeme druhú podmienku. Ak k X_n pridáme n-té písmeno (v prípade pripísania tohto písmena na začiatok slova sa postupuje úplne analogicky vzhľadom na symetriu konštruovaných slov), tak toto slovo $\overline{X_{n-1} n X_{n-1} n}$ bude zostavené z dvoch rovnakých podslov $\overline{X_{n-1} n}$. Pripíšme teraz k X_n k-te písmeno k. Dostaneme tak slovo $\overline{X_n k}$. Ale $\overline{X_n k}$ si môžeme (vďaka spôsobu konštrukcie) zapísať aj v tvare $\overline{X_k \ldots X_k n X_k \ldots X_k k}$. Preto môžeme použiť indukčný predpoklad a dostávame, že slovo $\overline{X_k k}$ obsahuje dve vedľa seba stojace rovnaké podslová $\overline{X_{k-1} k}$. Keďže tieto dve podslová sú susednými podslovami slova $\overline{X_n n}$, dostávame požadované tvrdenie úlohy matematickou indukciou.

Komentár a bodovanie: Za nájdenie vyhovujúcich slov ste získali 2 body. Za zdôvodnenie ich správnosti zvyšné 3. Viacerí ste zabudli na prípad, že abeceda má len 1 písmeno, za to ste stratili 1 bod.

7. Nech $MABCD$ je ihlan s rovnobežníkovou podstavou $ABCD$. Určte pomer, v ktorom delí rovina prechádzajúca stredom hrany MC a vrcholmi A a D objem ihlana.

Riešenie: Označme si stred hrany MC ako K. Výšku ihlana označme h. Potom pre jeho objem dostávame vzťah

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h$$

Objem štvorstenov $ABCK$ a $ACDK$ je rovnaký a rovná sa

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} V ,$$

lebo uhlopriečka delí rovnobežník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom a výška v týchto štvorstenoch je $\frac{h}{2}$, lebo K je stredom MC – ak by sme označili pätu výšky

z bodu *M* na rovinu *ABCD* ako *O* a pätu výšky z bodu *K* na túto rovinu ako *P*, potom trojuholníky *COM* a *CPK* sú podobné s koeficientom podobnosti $\frac{1}{2}$, a teda

$$|KP| = \frac{1}{2}|MO| = \frac{h}{2}.$$

Nech *E* je stred hrany *BM*. Potom sa objem štvorstena *ABKE* rovná polovici objemu štvorstena *ABKM*, ktorý sa rovná polovici objemu štvorstena *ABKC*, teda

$$V_{ABKE} = \frac{1}{8}\mathrm{V}.$$

Potom sa objem časti ihlana pod rovinou *AKD* rovná

$$\frac{1}{4}V + \frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V = \frac{5}{8}V.$$

Objemy častí ihlana, na ktoré je delený rovinou *AKD*, sú v pomere 3:5.

Komentár a bodovanie: Za riešenia, ktoré považovali podstavu ihlana za štvorec alebo obdĺžnik, ste mohli získať maximálne 1 bod. Ak ste využívali rôzne vzorce, ktoré nie sú všeobecne známe, mohli ste získať maximálne 2 body. Za nedostatočné označovanie vytváraných bodov a spôsobu ich konštrukcie ste strácali 1 bod.

8. Prirodzené číslo *n* vieme napísať ako súčet troch druhých mocnín prirodzených čísel. Dokážte, že aj číslo n^2 môžeme zapísať ako súčet troch druhých mocnín prirodzených čísel.

Riešenie: Nech $n = a^2 + b^2 + c^2$, kde *a, b, c* sú prirodzené čísla, pričom navyše predpokladajme, že $a \geq b \geq c$. Potom

$$n^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2.$$

Vzhľadom na podmienku $a \geq b \geq c$ máme zabezpečené, že čísla $2ac$, $2bc$, $a^2 + b^2 - c^2$ sú prirodzené.

Komentár a bodovanie: Ak ste zabudli na overenie, či sú čísla v rozklade prirodzené, stratili ste 1 bod. Za vyskúšanie a overenie istých typov rozkladov ste mohli získať maximálne 1 bod.

9. Nájdite x_{1000}, ak $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ a pre každé prirodzené $n \geq 3$ je číslo x_n najmenším zloženým číslom väčším ako $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

Riešenie: Vypíšme si niekoľko prvých členov tejto postupnosti: $x_3 = 9$, $x_4 = 14 = x_3 + 5$, $x_5 = 20 = x_4 + 6$, $x_6 = 27 = x_5 + 7$. Na základe týchto prvých členov môžeme usúdiť, že pre $n \geq 4$ by mohlo platiť $x_n = x_{n-1} + n + 1$. Ak by to tak bolo, potom dostávame, že

$$x_n = x_3 + 5 + 6 + \ldots + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Dokážeme to matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 4$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké n. Dokážeme, že platí

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Podľa predpokladu musí platiť, že

$$x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = 2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1.$$

Teda

$$x_{n+1} \geq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Keďže číslo $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ je pre $n \geq 4$ zložené, dokázali sme, že

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

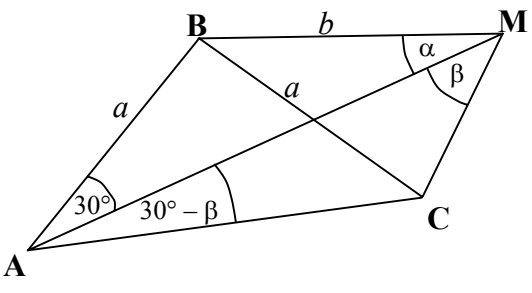
Dosadením $n = 1000$ dostávame

$$x_{1000} = \frac{1000 \cdot 1003}{2} = 501500.$$

Komentár a bodovanie: Ak ste vyšli z toho, že $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$, získali ste 0 bodov. Za správny odhad toho, ako bude vyzerať x_n, ste získali 2 body. Za dôkaz toho, že takto vami zvolené x_n bude spĺňať podmienky zo zadania, sa dali získať 3 body. Za odhad hodnoty x_n pomocou x_{n-1} a n sa dal získať 1 bod.

10. Je daný konvexný štvoruholník $ABMC$, v ktorom $|AB| = |BC|$, $|\angle BAM| = 30°$, $|\angle ACM| = 150°$. Dokážte, že AM je osou uhla BMC.

Riešenie: Označme $|AB| = |BC| = a$, $|BM| = b$, $|\angle BMA| = \alpha$, $|\angle AMC| = \beta$ podľa obrázka. Potom $|\angle CAM| = 180° - 150° - \beta = 30° - \beta$. Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou, platí $|\angle BCA| = |\angle BAC| = 60° - \beta$. Potom $|\angle BCM| = 150° - (60° - \beta) = 90° + \beta$.



Využitím sínusovej vety v trojuholníku ABM dostávame

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 30°} = 2b.$$

V trojuholníku *BMC*

$$\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{b}{\sin(90°+\beta)}=\frac{b}{\cos\beta}.$$

Dosadením $\frac{a}{b}$ z prvej sínusovej vety do druhej dostávame rovnosť

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.$$

Po dosadení $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ a úprave dostávame

$$\sin(\alpha-\beta)=0.$$

Vzhľadom na to, že $0<\alpha,\beta<180°$, dostávame, že $\alpha=\beta$, a teda *AM* je osou uhla *BMC*.

Komentár a bodovanie: Riešenia, ktoré spočívali v rysovaní, boli hodnotené 0 bodmi. Ak ste využívali dokazované tvrdenie, získali ste maximálne 1 bod podľa toho, či boli vaše úvahy použiteľné aj bez tohto predpokladu.

11. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *n* platí $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Riešenie: Tvrdenie dostávame použitím AG nerovnosti pre *n*-krát $1+\frac{1}{n}$ a jednu 1:

$$1+\frac{1}{n+1}=\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1},$$

odkiaľ po umocnení na $n+1$ dostávame neostrú nerovnosť. Rovnosť však nemôže nastať, lebo čísla 1 a $1+\frac{1}{n}$ sú pre každé *n* rôzne. Preto nastáva ostrá nerovnosť.

12. Dokážte pre $x,y,z\in\mathbf{R}$ nerovnosť $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$. Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: V riešení využijeme nerovnosť z príkladu 2.8 z 1. čísla časopisu:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla a,b,c a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a=b=c$. Najprv túto nerovnosť použijeme pre $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$ a potom pre $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$:

$$x^4+y^4+z^4=\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+\left(z^2\right)^2\geq x^2\cdot y^2+y^2\cdot z^2+z^2\cdot x^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\geq$$
$$\geq xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy=xyz(x+y+z).$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x^2 = y^2 = z^2$ a $xy = yz = zx$. V prípade, že sa jedno z x, y, z rovná 0, je pravá strana dokazovanej nerovnosti 0 a ľavá nezáporná. Rovnosť teda môže nastať len pre $x = y = z = 0$. Nech sú ďalej x, y, z nenulové. Z rovnosti $xy = yz = zx$ máme najprv $xy = yz$, odkiaľ po predelení nenulovým y máme $x = z$. Analogicky dostaneme $y = x$. Vcelku $x = y = z$. Spojením s výsledkom pre situáciu, keď je aspoň jedno z x, y, z nulové dostávame, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = y = z$.

Komentár a bodovanie: Za nedôsledné skúmanie situácie, v ktorej nastáva rovnosť, ste stratili 1 bod, lebo ak $x^2 = y^2 = z^2$, neznamená to ešte, že platí $x = y = z$. Pri umocňovaní na párnu mocninu treba dávať pozor pri umocňovaní záporných čísel, pretože sa tam znak nerovnosti obracia. A, samozrejme, stále treba dávať pozor na delenie nulou.

13. Dokážte nerovnosť $a + b + c \le \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$ $(a, b, c \in \mathbf{R}^+)$. Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie: Aj v tomto príklade využijeme nerovnosť

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla x, y, z a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = y = z$. Dosadíme $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab = abc(a + b + c).$$

Predelením tejto nerovnosti kladným číslom abc dostávame požadované tvrdenie. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = c$ (dokázané v predchádzajúcom príklade).

Komentár a bodovanie: Za dôkaz rovnosti ste mohli získať 2 body. Taktiež ako v predchádzajúcom príklade aj v tomto treba dávať pozor na delenie nulou. Za dôkaz opačným smerom ste mohli získať maximálne 3 body v závislosti od ekvivalentnosti používaných úprav.

14. Dokážte, že pre každé $n > 2$ platí $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > \frac{1}{2}$.

Riešenie: V riešení využijeme pomocnú nerovnosť

$$1 - \frac{1}{2^k} > \frac{2^k - 2}{2^k - 1},\ k \in \{2, 3, \ldots, n\},$$

ktorú ľahko dokážeme roznásobením. Túto nerovnosť môžeme zapísať aj ako

$$1-\frac{1}{2^k}>2\cdot\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1}.$$

Využitím tejto nerovnosti dostávame:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>2\cdot\left(\frac{2-1}{2^2-1}\right)\cdot 2\cdot\left(\frac{2^2-1}{2^3-1}\right)\cdots 2\cdot\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\right)=\frac{2^{n-1}}{2^n-1}>\frac{1}{2},$$

lebo susedné zlomky sa vykrátia a ostane len čitateľ prvého a menovateľ posledného zlomku. Posledná nerovnosť vyplýva z nerovnosti

$$\frac{2^{n-1}}{2^n-1}>\frac{2^{n-1}-0{,}5}{2^n-1}=\frac{2^{n-1}-0{,}5}{2\cdot\left(2^{n-1}-0{,}5\right)}=\frac{1}{2}.$$

Tým sme požadovanú nerovnosť dokázali.

Komentár a bodovanie: Vyskytlo sa aj riešenie pomocou nekonečných súčinov, hlavným problémom tu bolo dokazovanie, resp. nedokazovanie ich konvergencie.