Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1

Ročník: 14
Číslo: 2
Šk. rok: 2008/2009

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika je veda o tvaroch a počte. Matematický um je logikou v dôraznom pozorovaní foriem a množstva.

Edgar Allan Poe

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

už je tu jún, maturanti majú maturity za sebou a možno aj tento neskorý čas spôsobil, že počet zapojených žiakov do korešpondenčnej súťaže v tomto roku bol taký malý – zapojilo sa vás len 6. Tento počet však ešte stále môžete ovplyvniť a získať zaujímavé ceny – nič nie je stratené, v tretej sérii ešte stále môžete získať cenné body. Pre najlepších riešiteľov máme pripravené publikácie Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky, Metódy riešenia matematických úloh a perá.

Vzhľadom na nízky počet riešiteľov v tomto roku neplánujeme zorganizovať sústredenie najlepších riešiteľov, ktoré bývalo tradične v lete. Dúfam však, že v budúcom roku ho zorganizujeme.

V časopise vám prinášame tradičný článok z histórie matematiky o Abrahamovi de Moivre, riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže, informácie o celoštátnom kole Matematickej olympiády v kategórii A – zadania, vzorové riešenia a výsledkovú listinu a pozvánku na členskú schôdzu Jednoty slovenských matematikov a fyzikov, pobočky Bratislava 1. Radi vás uvítame v našich radoch.

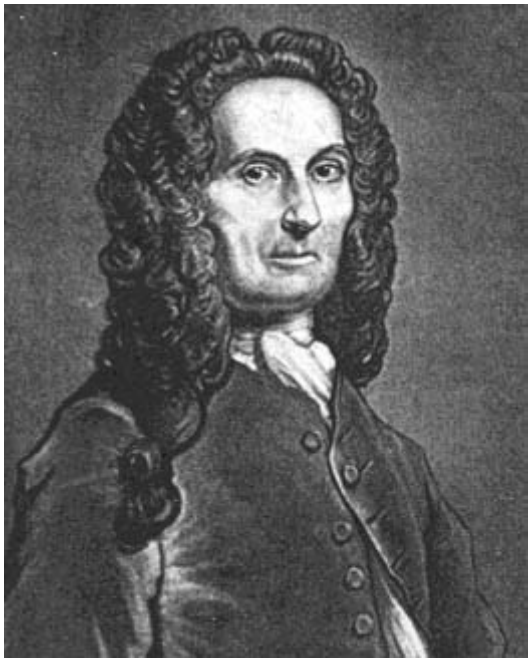
Príjemne strávený posledný mesiac v škole vám želá

Martin Hriňák

Abraham de Moivre – radil hazardným hráčom

Pomerne známa matematická veta z gymnaziálnych učebných osnov o umocňovaní komplexných čísel v goniometrickom tvare sa volá Moivreova veta:

$$\left[r\cdot\left(\cos\varphi+\mathrm{i}\cdot\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\cdot\left(\cos n\varphi+\mathrm{i}\cdot\sin n\varphi\right).$$



Je zaujímavým spojením goniometrických javov s vlastnosťami algebraickými. Meno má po anglickom matematikovi francúzskeho pôvodu, ktorý túto vetu formuloval roku 1707 a publikoval až v roku 1730. **Abraham de Moivre** (26. 5. 1667, Vitry, francúzska Champagne – 27. 11. 1754, Londýn) pochádzal z drobnej šľachtickej protestantskej rodiny. Hovorí sa, že slovko „de“ si do mena pridal sám. Študoval filozofiu na Sorbone. Po zrušení nantského ediktu (1685), ktorý zabezpečoval rovnoprávnosť hugenotov a katolíkov, bol väznený (1685 – 1688), potom emigroval do Anglicka. Tam pôsobil ako súkromný učiteľ a privyrábal si vhodnými radami pri hazardných hrách. Spoznal sa aj s I. Newtonom a E. Halleyom. Stal sa spolu so Stirlingom popredným matematikom. V roku 1697 bol prijatý za člena Kráľovskej spoločnosti v Londýne, neskôr aj členom akadémií vied v Paríži a v Berlíne.

Moivre prispel k rozpracovaniu základov kombinatoriky a základov analytických metód teórie pravdepodobnosti v práci *The Doctrine of Chance* (1718). Zaoberal sa aj poisťovacou matematikou a uverejnil prácu *Annuities upon Lives* (1725). V práci z roku 1733 odvodil, že binomické rozdelenie je priblížením normálneho rozdelenia pravdepodobností a vyslovil vzťah pre približný výpočet faktoriálu. Tento spis bol postupne doplňovaný (1738, 1756). Moivre objavil súvislosti medzi rekurentnými rovnicami a diferenčnými rovnicami, obohatil aj náuku o nekonečných radoch.

Možno aj teraz pri spomienke na A. Moivrea sa vnucuje otázka o význame a použití vedomostí z matematiky. Pripomenieme si odpovede na podobnú problematiku od R. P. Feynmana (1918 – 1988), nositeľa Nobelovej ceny za fyziku (1965): „*Geometriu môžeme spojiť s algebrou reprezentáciou komplexných čísel v rovine… Aby sme lepšie vedeli chápať prírodu, môže byť nevyhnutné, aby sme lepšie chápali matematické vzťahy.*“ Možno by sa v dnešnej dobe pod takúto odpoveď podpísal aj úspešný matematik Abraham de Moivre.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2008/2009

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Podarilo sa nám z mora zachrániť dvoch stroskotancov – Janíčka a Marienku. Janík je dvakrát taký starý ako bola Marienka, keď bol Janík o šesť rokov starší ako je teraz Marienka. Keď bude Marienka o šesť rokov staršia ako je teraz Janík, budú spolu rovnako starí ako bude ich mama, ktorá má teraz 46 rokov. Koľko majú rokov?

Riešenie: Označme súčasný vek Janíčka j a súčasný vek Marienky m. Rozdiel vekov Janíčka a Marienky je $j-m$. Teraz je podstatné uvedomiť si, že rozdiel vekov Janíčka a Marienky bude stále konštantný. Ak budeme poznať vek $J_{č}$ Janíčka v nejakom inom čase $č$ a vek $M_{č}$ Marienky v tom istom čase, tak platí

$$J_{č} = M_{č} + (j-m),$$
$$M_{č} = J_{č} + (m-j).$$

Podobne, ak označíme vek mamy v čase $č$ ako $Mama_{č}$, tak si ho môžeme vyjadriť pomocou veku Marienky v tvare

$$Mama_{č} = M_{č} + (46-m),$$

pretože rozdiel vekov mamy a Marienky je stále $46-m$.

Zamerajme sa teraz na druhú podmienku pre veky Janíčka a Marienky (čas označíme indexom 1). Keď bude Marienka o šesť rokov staršia, ako je teraz Janík, bude mať $M_1 = j+6$ rokov. Janík bude mať v tom čase

$$J_1 = M_1 + (j-m) = (j+6) + (j-m) = 2j-m+6$$

rokov. Ich mama bude mať v tom istom čase

$$Mama_1 = M_1 + (46-m) = (j+6) + (46-m) = j-m+52$$

rokov. Preto musí platiť

$$J_1 + M_1 = Mama_1,$$

po dosadení jednotlivých vyjadrení

$$(2j-m+6) + (j+6) = j-m+52.$$

Vyriešením tejto rovnice dostávame, že platí $j=20$, teda Janík má 20 rokov.

Analogicky spracujeme prvú podmienku (čas označíme indexom 2). Keď bol Janík o šesť rokov starší ako je teraz Marienka, mal $J_2 = m+6$ rokov. Marienka mala v tom čase

$$M_2 = J_2 + (m-j) = (m+6) + (m-j) = 2m+6-j = 2m-14$$

rokov. Janík má teraz 20 rokov a keďže je dvakrát taký starý ako Marienka v čase 2, tak Marienka mala v tom čase 10 rokov. Preto musí platiť $2m-14=10,$ odkiaľ dostávame, že $m=12$, teda Marienka má 12 rokov.

2. Na lavičke v parku sedia štyri dievčatá: Jana, Eva, Zuzana a Pavla. Zoraďte dievčatá podľa výšky, podľa veku a podľa krásy, ak viete, že:
a) Zuzana je vyššia ako Eva, ale nižšia a krajšia ako Pavla.
b) Pavla je mladšia ako Zuzana alebo Eva.
c) Eva je krajšia ako Zuzana, ale nie je taká pekná ako Jana.
d) Jana je staršia ako Zuzana a mladšia ako Eva, ale je menšia ako obe.

Riešenie: Pri riešení úlohy budeme používať zápis $A<B$ na vyjadrenie, že dievča s menom, ktoré sa začína na písmeno *A*, je nižšie, resp. mladšie, resp. menej pekné ako dievča, ktorej meno začína na písmeno *B*.

Krása sa spomína v tvrdeniach a) a c). Z tvrdenia c) vieme, že $J>E>Z$. Z tvrdenia a) máme usporiadanie $Z>P$. Preto dostávame celkové usporiadanie $J>E>Z>P$, teda najkrajšia je Jana, druhá najkrajšia je Eva, tretia najkrajšia je Zuzana a najmenej pekná je Pavla.

Pre výšku dostávame z a) usporiadanie $P>Z>E$. Z tvrdenia d) dostávame, že platí $J<Z$ a $J<E$. Keďže $Z>E$, dostávame jediné usporiadanie $P>Z>E>J$, teda najvyššia je Pavla, nižšia je Zuzana, ešte nižšia je Eva a najnižšia je Jana.

Zaoberajme sa vekom. Na základe d) vieme, že platí $E>J>Z$. Jedinou ďalšou podmienkou, ktorá sa viaže s vekom, je b). Táto podmienka vzhľadom na už získané usporiadanie vekov vylučuje jedine možnosť $P>E>J>Z$. Úloha má preto v prípade veku tri možné riešenia: $E>P>J>Z$, $E>J>P>Z$ a $E>J>Z>P$, teda Eva je najstaršia a buď je druhá najstaršia Pavla, tretia najstaršia Jana a najmladšia Zuzana, alebo je druhá najstaršia Jana, tretia najstaršia Pavla a najmladšia Zuzana, alebo je druhá najstaršia Jana, tretia najstaršia Zuzana a najmladšia Pavla.

3. Nech *x* a *y* sú také reálne čísla, že čísla x^2+y^2, x^3+y^3 a x^4+y^4 sú racionálne. Dokážte, že aj čísla $x+y$ a xy sú racionálne.

Riešenie: Ak sa jedno z čísel, povedzme *y*, rovná 0, tak čísla x^2 a x^3 sú racionálne. Ak sa *x* rovná 0, tak potom tvrdenie úlohy platí. Ak je *x* nenulové, potom $x=\frac{x^3}{x^2}$, teda *x* je podielom dvoch racionálnych čísel, a teda je to racionálne číslo. Teda aj čísla $x+y=x$ a $xy=0$ sú racionálne. Ďalej predpokladajme, že obe čísla sú nenulové.

Vieme, že platí

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2,$$

teda

$$x^2y^2 = \frac{\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^4+y^4\right)}{2},$$

čo znamená, že x^2y^2 je racionálne číslo, lebo je podielom dvoch racionálnych čísel (čitateľ je racionálny, lebo je rozdielom dvoch racionálnych čísel).

Platí taktiež

$$\left(x^2+y^2\right)^3 = x^6+y^6+3x^2y^2\left(x^2+y^2\right),$$

odkiaľ po úprave dostávame, že platí

$$x^6+y^6 = \left(x^2+y^2\right)^3-3x^2y^2\left(x^2+y^2\right),$$

čo znamená, že x^6+y^6 je racionálne číslo (na pravej strane sú čísla x^2y^2 a x^2+y^2 racionálne).

Teraz sa pozrime na ďalší vzťah

$$\left(x^3+y^3\right)^2 = x^6+y^6+2x^3y^3,$$

odkiaľ analogicky dostaneme, že x^3y^3 je racionálne číslo. Potom je aj číslo

$$xy = \frac{x^3y^3}{x^2y^2}$$

racionálne, lebo je podielom dvoch nenulových racionálnych čísel.

Poslednou rovnosťou, ktorú využijeme, je rovnosť

$$x^3+y^3 = \left(x+y\right)\left(x^2+y^2-xy\right),$$

odkiaľ dostávame vyjadrenie $x+y$:

$$x+y = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2-xy}.$$

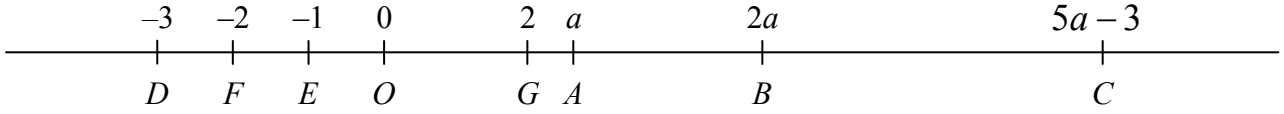
Keďže čísla x^3+y^3, x^2+y^2 a xy sú racionálne, je aj číslo $x+y$ racionálne, čo sme mali dokázať.

4. Na číselnej osi sú vyznačené tri čísla a, $2a$, $5a-3$, pričom platia nasledujúce nerovnosti: $a<2a<5a-3$. Zostrojte obraz čísla 2.

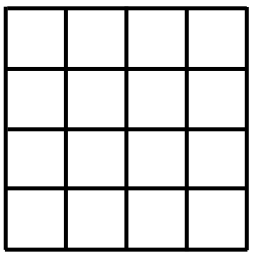
Riešenie: Najprv si musíme uvedomiť, že poznáme umiestnenie len týchto troch čísel, nič viac, teda nepoznáme ani umiestnenie nuly či jednotky. Označme body na číselnej osi, ktoré zodpovedajú číslam a, $2a$, $5a-3$, postupne A, B, C. Všetky konštrukcie, ktoré budeme robiť, sa budú odohrávať na číselnej osi. Keďže platí nerov-

nosť $a < 2a$, tak vieme, že $a > 0$. Potom $|AB| = a$. Zostrojme bod *O*, pre ktorý platí $|AO| = |AB|$ a zároveň $O \neq B$. Tento bod je obrazom nuly, pretože $a - a = 0$.

Teraz nanesieme dĺžku *a* päťkrát vľavo od bodu *C*. Inak povedané, zostrojíme bod *D*, pre ktorý platí $|DC| = 5a$ a $D \in \overleftarrow{CB}$. Keďže $5a - 3 - 5a = -3$, zostrojili sme obraz čísla –3. Rozdeľme úsečku *OD* dvoma bodmi *E* a *F* na 3 rovnaké časti (napríklad pomocou podobnosti trojuholníkov), bez ujmy na všeobecnosti nech bod *E* je bližšie k bodu *O*. Potom bod *F* zodpovedá číslu –2. Teraz už len zostrojíme bod *G*, ktorý je rovnako vzdialený od bodu *O* ako bod *F* a je od neho rôzny. Bod *G* je potom hľadaným bodom, ktorý zodpovedá číslu –2. Na obrázku sú znázornené jednotlivé body a čísla, ktorým zodpovedajú.



5. Štvorec s rozmermi $n \times n$ jednotiek je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Určte počet všetkých štvorcov v tomto útvare. Výsledok uveďte v uzavretom tvare, teda takom, ktorý bude obsahovať len konečný počet operácií ako sčítanie, násobenie, delenie a pod. bez ohľadu na veľkosť čísla *n*.



Riešenie: Rozdeľme všetky štvorce, ktoré sa v danom útvare nachádzajú, podľa toho, akú dlhú majú stranu. Najmenšia dĺžka strany štvorca je 1 jednotka a najväčšia *n* jednotiek. Každý štvorec v útvare je jednoznačne charakterizovaný dĺžkou svojej strany a ľavým horným vrcholom. Teraz už len stačí zistiť, kde všade môžu ľavé horné vrcholy byť. Štvorec s dĺžkou strany *n* jednotiek je len jeden, pretože do úvahy prichádza len jeden vrchol. Pre štvorec so stranou dĺžky $n-1$ jednotiek sú to vrcholy jednotkového štvorca v ľavom hornom rohu. Tie sú štyri. Štvorce s dĺžkou strany $n-1$ jednotiek sú preto štyri. Pre štvorec so stranou dĺžky $n-2$ jednotiek sú to vrcholy v ľavom hornom štvorci 2×2, ktorých je 9. Preto štvorcov s dĺžkou strany $n-2$ jednotiek je 9. Analogicky môžeme pokračovať ďalej až zistíme, že štvorcov s dĺžkou strany 1 jednotka je n^2. Všetkých štvorcov je preto

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 .$$

Tento tvar však obsahuje so zvyšujúcim sa *n* čoraz viac operácií. Preto ho musíme upraviť na vhodnejší tvar. Matematickou indukciou dokážeme, že platí

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) .$$

Pre $n = 1$ tvrdenie platí, pretože $1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké prirodzené číslo n. Potom dostávame, že platí:

$$1+4+9+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+1)}{6}\cdot\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]=\frac{(n+1)}{6}\cdot\left[2n^2+7n+6\right]=\frac{(n+1)}{6}(n+2)(2n+3),$$

čo sme chceli dokázať.

Komentár: Za prvú časť s kompletným zdôvodnením ste mohli získať 3 body a za nájdenie uzavretého tvaru výsledku a jeho dôkaz 2 body.

6. Anton a Braňo vyrazili na svojich motocykloch do susedného mesta. Jazdili pohodlne, držali sa spolu. V pätine cesty si Anton spomenul, že zabudol doma svoje dokumenty. Preto sa otočil a vrátil sa späť domov, pričom svoju rýchlosť zvýšil o 25 %. Braňo pokračoval v ceste, svoju rýchlosť znížil o 25 %. Anton si doma bez straty času vyzdvihol dokumenty a vyrazil znova na cestu. Poslednú časť cesty absolvovali už zase spolu rýchlosťou 48 km/h, pričom oproti pôvodnému plánu meškali 10 minút. Určte vzdialenosť susedného mesta.

Riešenie: Označme rýchlosť, ktorou vyrazili Anton a Braňo, v kilometroch za hodinu, písmenom v, vzdialenosť miest ako s kilometrov a dĺžku poslednej časti cesty ako x kilometrov.

Pohyb Antona si rozdelíme na 4 úseky: Prvú časť dĺžky $0,2s$ sa pohyboval rýchlosťou v. Potom, keď sa vracal domov, prešiel vzdialenosť $0,2s$ rýchlosťou $1,25v$. Kým opäť stretol Braňa, prešiel vzdialenosť $s-x$ rýchlosťou $1,25v$. Poslednú časť cesty, ktorá má dĺžku x, prešiel rýchlosťou 48 km/h.

Braňovu cestu si rozdelíme na tri úseky: Prvú časť dĺžky $0,2s$ sa pohyboval rýchlosťou v. Druhú časť cesty, keď šiel sám, sa pohyboval rýchlosťou $0,75v$ a jej dĺžka bola $s-x-0,2s=0,8s-x$. Poslednú časť cesty, ktorá má dĺžku x, prešiel rýchlosťou 48 km/h.

Keďže chlapci sa rozdelili na konci 1. úseku a stretli na začiatku 3. Braňovho úseku, trvalo im to rovnaký čas dostať sa tam. Znamená to, že Braňovi trvalo prejsť jeho 2. úsek rovnako dlho ako Antonovi jeho druhý a tretí úsek spolu. Vyjadrením týchto časov dostávame, že musí platiť

$$\frac{0,2s}{1,25v}+\frac{s-x}{1,25v}=\frac{0,8s-x}{0,75v}.$$

Po prenásobení nenulovým číslom v a upravení dostaneme, že $x=0,2s$.

Vyjadrime si teraz čas, ktorý trvala cesta Braňovi. Celkový čas, ktorý by mu táto cesta trvala, ak by sa Anton nevracal, by bol $\frac{s}{v}$. Keďže mali meškanie 10 minút, trvala im teraz cesta $\frac{s}{v}+\frac{1}{6}$. Vyjadrením časového trvania jednotlivých úsekov jeho cesty dostávame, že platí:

$$\frac{s}{v}+\frac{1}{6}=\frac{0,2s}{v}+\frac{0,8s-x}{0,75v}+\frac{x}{48}.$$

Dosadením $x=0,2s$ a upravením postupne dostaneme, že platí:

$$\frac{s}{v}+\frac{1}{6}=\frac{0,2s}{v}+\frac{0,8s-0,2s}{0,75v}+\frac{0,2s}{48},$$
$$\frac{s}{v}+\frac{1}{6}=\frac{0,2s}{v}+\frac{0,6s}{0,75v}+\frac{0,2s}{48},$$
$$\frac{s}{v}+\frac{1}{6}=\frac{0,2s}{v}+\frac{0,8s}{v}+\frac{0,2s}{48},$$
$$\frac{s}{v}+\frac{1}{6}=\frac{s}{v}+\frac{0,2s}{48},$$
$$\frac{1}{6}=\frac{0,2s}{48},$$
$$40=s.$$

Vzdialenosť susedného mesta od ich domova je 40 kilometrov.

7. Nájdite všetky také celé čísla y a prvočísla p, q menšie ako 100, pre ktoré platí

$$1\,999=86y+p-q\,.$$

Riešenie: Ak by boli obidve prvočísla p, q rovnakej parity, potom by bolo číslo na pravej strane párne a na ľavej nepárne, teda nemohli by sa rovnať. Preto sa jedno z prvočísel p, q rovná dvom. Hodnota rozdielu $|p-q|$ je maximálne 97, takže dostávame, že platí

$$1\,902=1\,999-97\le 86y\le 1\,999+97=2\,096.$$

V tomto intervale sa nachádzajú len dva násobky čísla 86: 1978 (zodpovedajúce y je 23) a 2064 (zodpovedajúce y je 24). V prvom prípade potom musí platiť

$$1\,999=1\,978+p-q\,,$$

teda $21=p-q$. Keďže jedno z p, q sa rovná 2, musí to byť q a dostávame jediné riešenie $p=23$. V druhom prípade musí platiť

$$1\,999=2\,064+p-q\,,$$

po úprave

$$65 = q - p\,.$$

V tomto prípade musí platiť $p = 2$ a $q = 67$.

Úloha má dve riešenia: $y = 23$, $q = 2$, $p = 23$ a $y = 24$, $p = 2$, $q = 67$.

8. Koľko stien má ihlan, ktorý má toľko hrán, ako má vrcholov pravidelný mnohouholník s vnútorným uhlom 160°?

Riešenie: Súčet vnútorných uhlov pravidelného *n*-uholníka je $(n-2)\cdot 180°$. Keďže všetky jeho vnútorné uhly sú rovnaké, každý z nich má veľkosť

$$\frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

Musí preto platiť

$$\frac{n-2}{n}\cdot 180° = 160°,$$

odkiaľ dostávame, že $n = 18$.

Ihlan, ktorého podstavou je *m*-uholník, má $2m$ hrán (*m* podstavných a *m* bočných hrán). Preto musí platiť $2m = 18$, odkiaľ dostávame, že $m = 9$. Ihlan, ktorého podstavou je 9-uholník, má 10 stien – podstavu a 9 bočných stien.

9. Nech *ABCD* je konvexný štvoruholník a nech *M* je stred úsečky *CD*. Priamky *BM* a *AM* sú kolmé a platí $|AB| = |BC| + |AD|$. Dokážte, že priamky *BC* a *AD* sú kolmé.

Riešenie: Tvrdenie úlohy neplatí. Dokážeme, že tieto dve priamky sú rovnobežné, a teda nemôžu byť kolmé. Zobrazme bod *M* v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky *AB* do bodu *P*. Keďže uhol *AMB* rovnobežníka *AMBP* je pravý, *AMBP* je štvorec. Preto platí

$$|MP| = |AB| = |AD| + |BC|,$$

pričom sme využili predpoklad zo zadania. Na druhej strane platí aj

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB},$$

pričom sme využili, že *M* je stredom úsečky *CD*, a teda preň platí $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Dostali sme tak, že platí

$$|MP| = |AD| + |BC|,$$
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB},$$

čo znamená, že musí platiť $AD \parallel MP \parallel BC$, čo sme chceli dokázať (v opačnom prípade by sme dostali na základe trojuholníkovej nerovnosti, že platí $|MP| < |AD| + |BC|$).

10. Nájdite aritmetickú postupnosť piatich prvočísel s diferenciou aspoň 11.

Riešenie: Riešení tejto úlohy je viacero, vyskytli sa tieto dve: 7, 37, 67, 97, 127, resp. 5, 17, 29, 41, 53.

11. Nájdite dolnú celú časť čísla $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\cdots+\sqrt[3]{24}}}$, ak viete že, sa v uvedenom výraze nachádza *n* odmocnín (*n* je prirodzené číslo).

Riešenie: Položme $a_n=\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\cdots+\sqrt[3]{24}}}$, ak sa v uvedenom výraze nachádza *n* odmocnín (*n* je prirodzené číslo). Platí $2<\sqrt[3]{24}<3,$ teda $2<a_1<3.$ Vzhľadom na definíciu a_n si môžeme a_{n+1} rekurentne vyjadriť pomocou a_n takto:

$$a_{n+1}=\sqrt[3]{24+a_n}.$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí odhad $2<a_n<3.$ Prvý indukčný krok sme už urobili. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké *n*. Potom platia aj nasledujúce nerovnosti

$$2<\sqrt[3]{24+2}<\sqrt[3]{24+a_n}<\sqrt[3]{24+3}=3,$$

ktoré dokazujú, že $2<a_{n+1}<3.$ Využili sme pritom fakt, že funkcia $y=\sqrt[3]{x}$ je na kladných číslach rastúca. Vzhľadom na túto nerovnosť sa pre všetky prirodzené čísla *n* dolná celá časť čísla a_n rovná 2.

12. Dvaja hráči hrajú hru na hracej ploche $1\times 2\,000$ políčok. Striedavo vpisujú do prázdnych políčok písmená S a O. Hráč, ktorý skompletizuje ako prvý tri za sebou idúce políčka obsahujúce slovo SOS, vyhráva. Ak sú všetky políčka vyplnené písmenami bez toho, aby sa niekde nachádzalo slovo SOS, nastáva remíza. Zistite, či existuje vyhrávajúca stratégia pre jedného z hráčov.

Riešenie: Označme prázdne políčko ako zlé, ak jeho ľubovoľné vyplnenie jedným hráčom zabezpečí druhému hráčovi výhru v nasledujúcom ťahu, pričom prvý hráč nemal možnosť vyhrať napísaním písmena do žiadneho iného políčka (voľne povedané, výhra druhého hráča musí byť ťahom na niektoré zo susedných políčok políčka, kam písal prvý hráč, lebo inak by na vyhrávajúce políčko druhého hráča mohol napísať rovnaký symbol prvý hráč vo svojom ťahu a vyhral by). Dokážeme, že políčko je zlé práve vtedy, keď sa nachádza v bloku štyroch za sebou idúcich políčok tvaru S _ _ S, kde _ označuje prázdne políčko.

Ak máme prázdne políčko, ktoré je časťou bloku S _ _ S, tak ak doň napíšeme S, druhý hráč do druhého políčka napíše O a vyhrá. Naopak, ak doň napíšeme O, druhý

hráč do druhého voľného políčka napíše S a opäť vyhrá. To znamená, že obe políčka sú zlé.

Predpokladajme teraz, že máme zlé políčko. Ak doň napíše prvý hráč O, tak druhý hráč musí byť schopný v ďalšom ťahu vyhrať. Preto musí byť na jednej strane tohto políčka písmeno S a na druhej prázdne políčko, kam bude môcť druhý hráč dopísať S, aby dostal SOS. Ak by prvý hráč do zlého políčka napísal S, tak z jednej strany je prázdne políčko a z druhej strany je S: S S _. Preto aj na druhom políčku susediacom s vyznačeným prázdnym políčkom musí byť S, aby druhý hráč napísaním písmena O skompletizoval SOS, čím sme tvrdenie dokázali.

Teraz ukážeme, že druhý hráč má vyhrávajúcu stratégiu. Po ťahu prvého hráča zvolí ľubovoľné políčko, ktoré je vo vzdialenosti aspoň 7 políčok od ťahu prvého hráča a aj od kraja hracej plochy, a napíše doň S. Také políčko existuje vzhľadom na to, že máme k dispozícii 1 999 políčok. Po druhom ťahu prvého hráča skontroluje, či už nemôže vyhrať. Ak nie, tak napíše S do políčka, ktoré je vzdialené práve 3 políčka od políčka, kam napísal v prvom ťahu S, a okolo ktorého sú voľné aspoň 2 políčka v oboch smeroch. Také políčko určite existuje, lebo okolo prvého S je na oboch stranách voľných aspoň 7 políčok a po ťahu prvého hráča je aspoň 7 voľných políčok na aspoň jednej strane tohto S. Tým, že druhý hráč nemal možnosť vyhrať, nemôže teraz vyhrať ani prvý hráč, lebo zapísané písmená sú dostatočne ďaleko od seba (dve písmená, medzi ktorými je maximálne jedno voľné políčko, môžu byť tie, z ktorých aspoň jedno napísal prvý hráč, avšak tie netvoria výhernú kombináciu, pretože už by ju využil druhý hráč). Po tomto ťahu sú na hracej ploche dve alebo štyri zlé políčka. To znamená, že hra určite skončí výhrou jedného z hráčov.

Po každom ťahu prvého hráča bude na hracej ploche voľný nepárny počet políčok. Keďže zlé políčka sa vyskytujú len v dvojiciach, ich počet bude párny, a teda bude vždy voľné aspoň jedno políčko, ktoré nie je zlé a ktoré môže druhý hráč zvoliť. Pri jeho vypĺňaní musí už len zvážiť, ktoré písmeno má zvoliť, aby prvý hráč v ďalšom ťahu nemohol skompletizovať SOS s využitím tohto písmena. To sa vždy dá na základe pomocného tvrdenia urobiť. Po istom čase bude musieť prvý hráč zvoliť niektoré zo zlých políčok, čím druhý hráč vyhrá (prípadne môže vyhrať aj skôr, ak bude prvý hráč hrať zle). To znamená, že existuje vyhrávajúca stratégia pre druhého hráča.

13. Je daných $2n$ bodov v rovine, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Dokážte, že tieto body môžu byť rozdelené na n dvojíc tak, že úsečky určené týmito dvojicami bodov, sa nepretínajú.

Riešenie: Ak $n=1$, tak tvrdenie platí. Uvažujme ďalej $n>1$. Označme si zadané body A_1, ..., A_{2n}. Jednotlivé kroky je najlepšie sledovať na obrázku (pre jednodu-

chosť je tam len 8 bodov, teda $n=4$). Keďže žiadne tri z týchto bodov neležia na jednej priamke a $n>1$, tak musia byť rôzne. Zvoľme si ľubovoľnú priamku p v rovine a urobme kolmé priemety a_1, ..., a_{2n} bodov A_1, ..., A_{2n} na priamku p v tomto poradí, premietacie priamky označme postupne p_1, ..., p_{2n}. Keďže žiadne tri body z A_1, ..., A_{2n} neležia na jednej priamke, splývať s ľubovoľným bodom a_i môže vždy už len maximálne jeden zo zvyšných bodov a_l, $1\le l\le 2n$, $l\ne i$. Preznačme si tieto priemety pomocou písmen b_1, ..., b_{2n} tak, aby b_1 a b_{2n} boli najkrajnejšími bodmi a indexy boli zoradené vzostupne podľa vzdialenosti od bodu b_1 (môžeme to zapísať aj tak, že platí

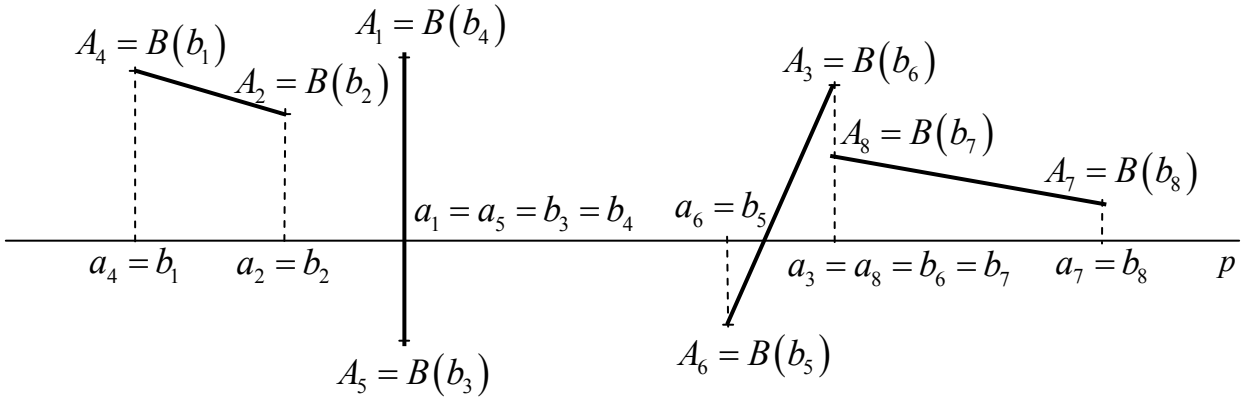
$$\{a_1,\ldots,a_{2n}\}=\{b_1,\ldots,b_{2n}\},$$

$$|b_1,b_{2n}|=\max_{1\le i,j\le 2n}|b_i,b_j|,$$

$$|b_{i+1},b_1|\ge|b_i,b_1| \text{ pre všetky } 1\le i\le 2n-1,$$

pričom ak platí $a_u=a_v$ pre nejaké $1\le u<v\le 2n$, tak kvôli jednoznačnosti a_u priradíme b_w a a_v priradíme b_{w+1} pre nejaké $1\le w<2n$). Vzhľadom na uvedený postup existuje bijekcia B, ktorá každému z bodov b_1, ..., b_{2n} priradí práve ten z bodov A_1, ..., A_{2n}, ktorý sa naň zobrazil.

Body A_1, ..., A_{2n} teraz rozdelíme do dvojíc takto: $B(b_{2k-1})$ spojíme s $B(b_{2k})$ pre $1\le k\le n$. Takto vzniknuté úsečky sa nemôžu pretínať. To dokážeme sporom. Predpokladajme, že by nastala situácia, že sa dve takto vytvorené úsečky pretnú. Nech sú to $B(b_{2k-1})B(b_{2k})$ a $B(b_{2l-1})B(b_{2l})$ pre $1\le k<l\le n$. Ak $b_{2k}=b_{2l-1}$, tak úsečka $B(b_{2k-1})B(b_{2k})$ leží v jednej polrovine s hraničnou priamkou p_{2k} a úsečka $B(b_{2l-1})B(b_{2l})$ leží v opačnej polrovine, pričom vieme, že $B(b_{2k})\ne B(b_{2l-1})$, teda tieto dve úsečky nemôžu mať spoločný bod. Ak $b_{2k}\ne b_{2l-1}$, tak $b_{2k}<b_{2l-1}$ a medzi úsečkami $B(b_{2k-1})B(b_{2k})$ a $B(b_{2l-1})B(b_{2l})$ je rovinový pás určený hraničnými priamkami p_{2k} a p_{2l-1}, ktorého vnútru nepatrí ani jeden bod týchto úsečiek, teda sa nemôžu pretínať. Tým sme našli hľadané rozdelenie bodov A_1, ..., A_{2n}.



14. V tabuľke $m \times n$ políčok je napísaných mn reálnych čísel. V každom ťahu je dovolené zmeniť znamienka v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci. Dokážte, že je možné po konečnom počte ťahov dosiahnuť stav, že súčet čísel v každom riadku a každom stĺpci bude nezáporný.

Riešenie: Uvažujme celkový súčet čísel v tabuľke. Máme preň maximálne 2^{mn} možností, čo je konečný počet (pre každé políčko máme maximálne dve možnosti, aké môže mať znamienko). Zaveďme spoločné označenie riadka a stĺpca slovom línia. Predpokladajme, že existuje taká línia, v ktorej je záporný súčet čísel s. Zmeňme v tejto línii všetky znamienka. Celkový súčet čísel v tabuľke sa nám zvýši o $2|s| > 0$. Keďže preň máme len konečný počet možností, určite po maximálne 2^{mn} krokoch nastane situácia, keď už nebudeme môcť zväčšiť celkový súčet čísel v tabuľke, a vtedy budú súčty vo všetkých líniách nezáporné (ak by bol aj vtedy niektorý líniový súčet záporný, tak by sme celkový súčet dokázali zvýšiť zmenou znamienok v ňom, čo však nie je možné). Tým sme tvrdenie dokázali.

Výsledkové listiny po 1. sérii úloh

Kategória Z

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	1	2	3	4	Spolu
1.	Hrušková	Martina	4. B	ZŠ Svit, Mierová 134	5	5	–	–	10
2.	Hornyáková	Viktória	kvarta	G P. Pázmanya Nové Zámky	–	2	1	2	5

Kategória C

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	3	4	5	6	Spolu
1.	Chudá	Fatima	1. A	Súkromné konzervatórium Nitra	0	4	2	–	6

Kategória A

Por.	Priezvisko	Meno	Trieda	Škola	7	8	9	10	Spolu
1.	Svatý	Lukáš	septima	G Nitra, Párovská 1	5	5	5	2	17
2.	Beznák	Samuel	1. C	G Dubnica nad Váhom, Školská 2	5	4	–	5	14
3.	Hornyák	Zsolt	septima C	G P. Pázmanya Nové Zámky	3	4	–	5	12

---

1. *Dokážte, že ak sú všetky čísla* p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ *a* $11p+10$ *prvočísla, tak číslo* $6p+11$ *je zložené.*

(Pavel Novotný)

Riešenie. Predpokladajme, že všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ sú prvočíslami. Skúmajme, aký zvyšok po delení piatimi môže dávať p, teda pre aké l z množiny $\{0,1,2,3,4\}$ a nezáporné celé číslo k môže platiť $p=5k+l$.

- ▷ Ak $p=5k$, tak $11p+10=5(11k+2)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p=5k+1$, tak $3p+2=5(3k+1)$ je prvočíslom jedine pre $k=0$, ale potom $p=1$, čo nie je prvočíslo.
- ▷ Ak $p=5k+2$, tak $7p+6=5(7k+4)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p=5k+3$, tak $9p+8=5(9k+7)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.

Číslo p preto musí byť tvaru $5k+4$. Potom $6p+11=5(6k+7)$, čo je zložené číslo pre každé nezáporné celé k.

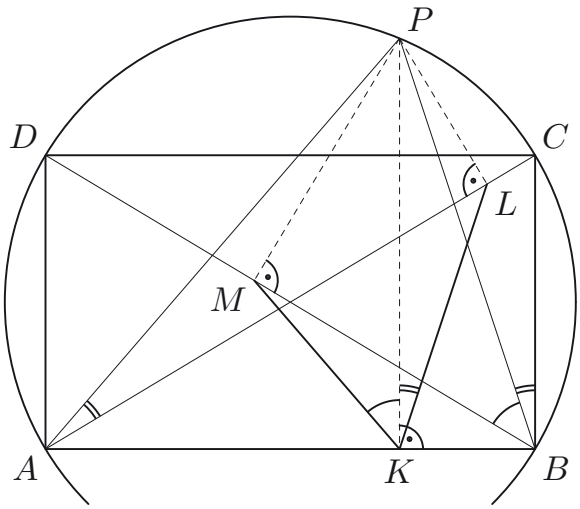
Poznámka. Najmenšie p, pre ktoré sú p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočíslami, je $p=2\,099$.

---

2. *Na kratšom z oblúkov* CD *kružnice opísanej pravouholníku* $ABCD$ *zvoľme bod* P. *Päty kolmíc z bodu* P *na priamky* AB, AC *a* BD *označme postupne* K, L *a* M. *Ukážte, že uhol* LKM *má veľkosť* 45° *práve vtedy, keď* $ABCD$ *je štvorec.*

(Tomáš Jurík)

Riešenie. Ukážeme, že uhol LKM má rovnakú veľkosť ako uhol CBD. Odtiaľ zadané tvrdenie triviálne vyplýva (uhol CBD má veľkosť 45° práve vtedy, keď $|BC|=|CD|$, čiže keď $ABCD$ je štvorec).



Obr. 1

Body B, K, M, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom BP. Pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PM teda platí $|\sphericalangle PKM|=|\sphericalangle PBM|$. Podobne body A, K, L, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom AP a pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PL máme $|\sphericalangle LKP|=|\sphericalangle LAP|$. Napokon,

z obvodových uhlov nad tetivou CP kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ dostávame $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplýva (obr. 1)

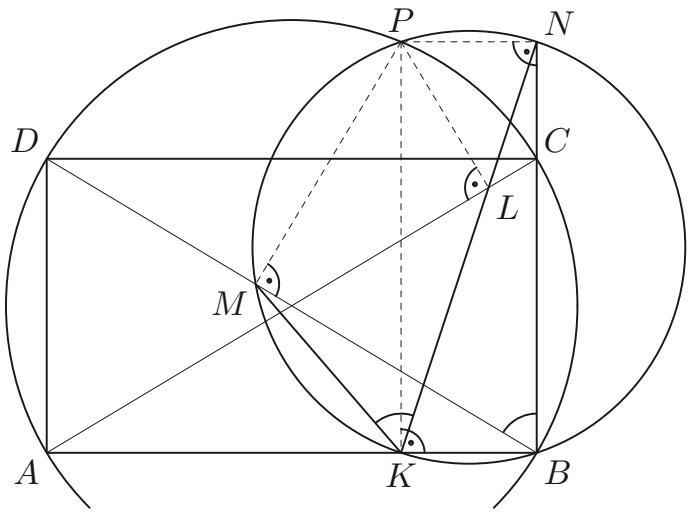
$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| = |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = \\ = |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Uvedený postup možno použiť aj v triviálnom prípade, keď $P = C$ alebo $P = D$; vtedy majú niektoré z uvažovaných uhlov nulovú veľkosť.

Iné riešenie. Opäť dokážeme, že uhly LKM a CBD majú rovnakú veľkosť. Označme N pätu kolmice z bodu P na priamku BC. Body K, L, N ležia na Simsonovej priamke prislúchajúcej bodu P a trojuholníku ABC (obr. 2). Na Tálesovej kružnici nad priemerom PB ležia body K, M aj N. Z obvodových uhlov nad tetivou MN teda máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$



Obr. 2

---

3. *Nájdite najmenšie kladné číslo x, pre ktoré platí: Ak a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je* 1, *potom*

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(Pavel Novotný)

Riešenie. Nech a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1. Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice čísel a^x, b^x, c^x máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Zvolením $x = 3$ v predošlej nerovnosti dostávame $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) \geqq 1/d$. Zrejme rovnako platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3+b^3+d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3+c^3+d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3+c^3+d^3) \geqq 1/a.$$

Sčítaním uvedených štyroch nerovností dostávame

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

teda pre $x = 3$ zadaná nerovnosť vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hľadanou najmenšou hodnotou, teda že pre ľubovoľné $x < 3$ zadaná nerovnosť nie je vždy splnená. Hľadajme štvoricu, pre ktorú nerovnosť nebude platiť, v tvare $a = b = c = t$, $d = 1/t^3$ pre vhodné t (závislé na danom $x < 3$). Pre takéto a, b, c, d vždy platí $abcd = 1$, a tiež

$$a^x+b^x+c^x+d^x = 3t^x + \frac{1}{t^{3x}},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{3}{t}+t^3 > t^3.$$

Ak $t > 1$, tak $1/t^{3x} < t^x$ a ľavá strana zadanej nerovnosti je menšia ako $4t^x$. Aby nerovnosť neplatila, stačí zvoliť $t > 1$ tak, aby platilo $t^3 > 4t^x$, čo je pre $x < 3$ ekvivalentné s podmienkou

$$t > \sqrt[3-x]{4}.$$

Tú vieme voľbou dostatočne veľkého t triviálne splniť.

Záver. Hľadané najmenšie kladné číslo je $x = 3$.

---

4. *Skúmajme, pre ktoré prirodzené čísla n existujú práve štyri prirodzené čísla k také, že číslo $n+k$ je deliteľom čísla $n+k^2$.*

a) Ukážte, že vyhovuje $n = 58$ a nájdite príslušné štyri k.

b) Dokážte, že párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje práve vtedy, keď p aj $2p+1$ sú prvočísla.

(Nulu medzi prirodzené čísla nepočítame.)

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Z rovnosti $n+k^2 = (k+n)(k-n)+n(n+1)$ vidíme, že $n+k \mid n+k^2$ práve vtedy, keď $n+k \mid n(n+1)$. Počet čísel k s touto vlastnosťou je teda rovný počtu tých deliteľov čísla $D = n(n+1)$, ktoré sú väčšie ako n.

a) V prípade $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele príslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že delitele čísla D väčšie ako 58 sú práve štyri: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To sú hodnoty $58 + k$, takže príslušné k sú o 58 menšie, teda postupne $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$.

b) Pre párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p+1)$, takže ľahko vypíšeme štyri delitele čísla D, ktoré sú väčšie ako dané $n = 2p$:

$$2p+1 < 2(2p+1) < p(2p+1) < 2p(2p+1). \tag{1}$$

Ak sú p, $2p+1$ prvočísla, žiadne iné také delitele číslo D zrejme nemá, teda $n = 2p$ spĺňa vlastnosť zo zadania.

Dokážeme, že ak aspoň jedno z čísel p, $2p+1$ je zložené, tak D má okrem deliteľov vypísaných v (1) ešte aspoň jedného deliteľa väčšieho ako $2p$.

Ak je číslo $p \geqq 3$ zložené, je deliteľné niektorým q, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$ a číslo D má deliteľa $2q(2p+1)$, ktorý s výnimkou prípadu $q = \frac{1}{2}p$ leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2q(2p+1) < p(2p+1).$$

Ak číslo p nemá iného netriviálneho deliteľa okrem $q = \frac{1}{2}p$, platí $p = 4$. Vtedy však ani číslo $2p+1 = 9$ nie je prvočíslo, takže piateho deliteľa nájdeme podľa nasledujúceho odseku.

Ak (nepárne) číslo $2p+1$ je zložené, tak je deliteľné niektorým q, $3 \leqq q < p$, a číslo D má deliteľa $2pq$, ktorý leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2pq < p(2p+1), \quad \text{lebo} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \text{ a } q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalencia z časti b) je tak dokázaná.

---

5. *V každom z vrcholov pravidelného n-uholníka $A_1A_2\ldots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n+1-k$ mincí.*

(Radek Horenský)

Riešenie. Označme každú mincu číslom vrcholu, na ktorom leží (teda číslom z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$) a po každom preložení dvojice mincí označenie upravme. Sledujme, ako sa zmení súčet S všetkých čísel priradených minciam po jednom preložení.

Ak neprekladáme mince medzi vrcholmi A_1 a A_n, súčet sa nezmení, lebo na jednej minci sa číslo zmenší a na druhej zväčší o 1. Rovnako sa súčet nezmení, ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_n do A_1. Ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S stúpne o $(n-1)+1 = n$. Ak naopak preložíme jednu mincu z A_n do A_1 a druhú z A_{i+1} do A_i (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S klesne o n. Z uvedeného vyplýva, že zvyšok súčtu S po delení číslom n sa nikdy nezmení.

V počiatočnej pozícii má súčet S hodnotu

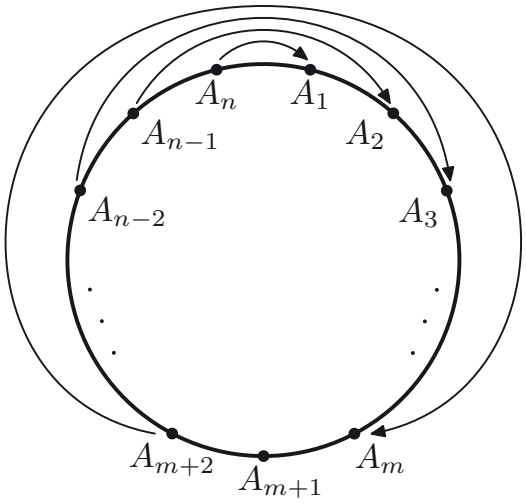
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

v želanej konečnej pozícii má S hodnotu

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(využili sme známe vzorce pre súčet prvých a druhých mocnín čísel od 1 po n). Aby bolo možné presunúť mince z počiatočnej do želanej konečnej pozície, musia uvedené dve hodnoty dávať rovnaký zvyšok po delení n. To je možné len vtedy, keď ich rozdiel $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ je deliteľný n, čiže keď číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ je celé. Dosadením jednotlivých zvyškových tried modulo 6 ľahko overíme, že táto podmienka je splnená práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

Ostáva ukázať, že pre takéto n vieme mince poprekladať požadovaným spôsobom. Popíšeme jeden z možných postupov. Mincu, ktorá je na začiatku vo vrchole A_1, nazvime M. Všetky mince budeme prekladať v rovnakom smere, jedine mincu M (ktorú preložíme v každom kroku bez toho, aby by sme to v nasledujúcom odseku pripomínali) budeme prekladať opačným smerom a dodržiavať tak zadané pravidlá prekladania.



Obr. 3

Označme $n = 2m+1$ (zrejme uvažované hodnoty n sú nepárne). Mince budeme prekladať tak, ako je znázornené na obr. 3. Najprv preložíme $n-1$ mincí z vrcholu A_n na vrchol A_1 (posun o 1), potom $n-3$ mincí z vrcholu A_{n-1} na vrchol A_2 (posun o 3), atď., až napokon preložíme 2 mince z vrcholu A_{m+2} na vrchol A_m (posun o $n-2$). Tým dosiahneme, nepočítajúc mincu M, že v každom vrchole bude požadovaný počet mincí, len vo vrchole A_1 bude $n-1$ mincí. Vypočítajme, kde sa po uvedených preloženiach nachádza minca M.

Celkový počet preložení bol

$$T = (n-1)\cdot 1 + (n-3)\cdot 3 + \cdots + 2\cdot(n-2) = \sum_{k=1}^{m} k(n-k) =$$

$$= (2m+1)\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{2}m(m+1)(2m+1) - \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) =$$

$$= \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)n.$$

Pritom $m(m+1) = \frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ je číslo deliteľné tromi, lebo n nie je násobkom troch. Takže T je celočíselným násobkom n a minca M sa po príslušnom počte okruhov ocitla opäť vo vrchole A_1. V ňom je preto tiež požadovaný počet n mincí.

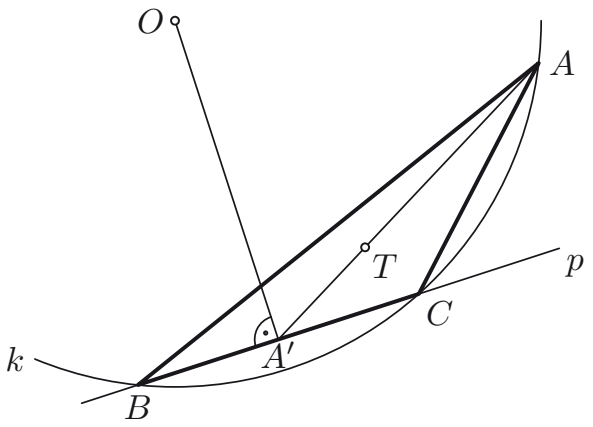
Odpoveď. Požadovaný stav je možné dosiahnuť práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

6. *V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O.*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Vezmime nejaký bod A z roviny ω. Aby mohol byť vrcholom trojuholníka opísaného v zadaní, musí byť rôzny od bodov O a T. Popíšeme všeobecnú konštrukciu trojuholníka ABC, v ktorom máme daný vrchol A, stred opísanej kružnice O a ťažisko T (pre trojicu navzájom rôznych bodov A, O, T). Potom zistíme, pre ktoré body A takýto trojuholník nie je možné skonštruovať.

Nech A' je stred strany BC. Bod A' je obrazom bodu A v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom $-\frac{1}{2}$. Ak $A' \neq O$, body B a C ležia na kolmici p na priamku OA' vedenej bodom A' a zároveň na opísanej kružnici k so stredom O a polomerom OA (obr. 4).

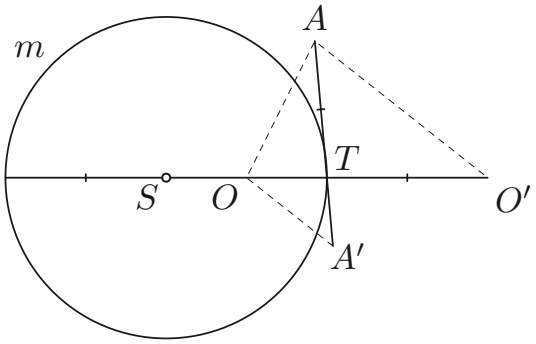


Obr. 4

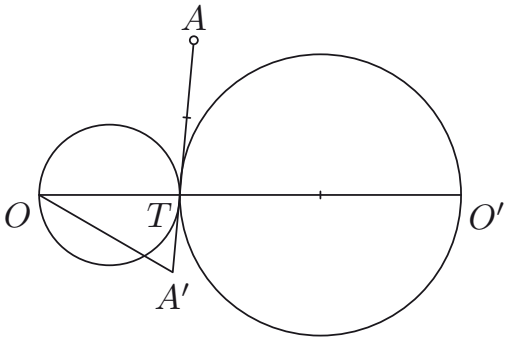
K danému bodu A vieme vždy zostrojiť bod A' ako jeho obraz v uvedenej rovnoľahlosti. Predpokladajme najprv, že $A' \neq O$. Aby sme dostali dva rôzne body B a C, musí byť priamka p sečnicou kružnice k. To nastáva práve vtedy, keď $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, preto konštrukčnú podmienku môžeme zapísať v tvare $|O'A| < 2|OA|$. Takže bod A musí ležať mimo kruhu určeného Apollóniovou kružnicou[1] $m(S; |ST|)$, kde S je bod súmerne združený s bodom T podľa bodu O (obr. 5).

Ak teda $A' \neq O$, čiže $A \neq O'$, dostaneme konštrukciou tri body A, B, C. Tie budú vrcholmi vyhovujúceho trojuholníka, ak neležia na priamke. Na priamke ležia, keď je priamka BC totožná s priamkou AT, t. j. keď priamka OA' je kolmá na AT. Bod A' preto nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom OT a (po „zobrazení“ tejto podmienky v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2) bod A nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$ (obr. 6).

[1] Pre dané dva rôzne body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnica množina bodov X, pre ktoré platí $|PX| = k|QX|$. Stred Apollóniovej kružnice leží na priamke PQ, rovnako ako dva body kružnice, ktoré vieme pre dané k jednoducho zostrojiť.

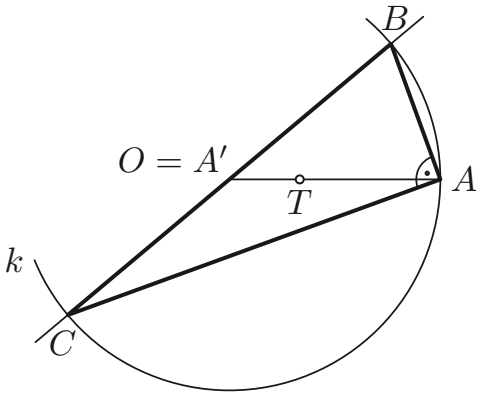


Obr. 5



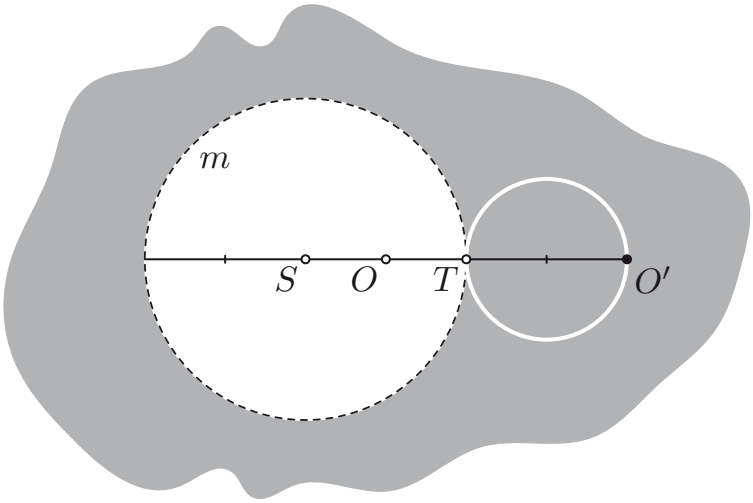
Obr. 6

V prípade, že bod A je totožný s bodom O', t. j. $A' = O$, namiesto kolmice p môžeme zobrať ľubovoľnú priamku (rôznu od AT) prechádzajúcu bodom O (obr. 7). Dostaneme tak nekonečne veľa rôznych trojuholníkov ABC s pravým uhlom pri vrchole A, ktoré spĺňajú všetky podmienky zadania.



Obr. 7

Záver. Hľadanou množinou bodov je vonkajšia oblasť kružnice m okrem bodov ležiacich na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$, pričom bod O' do hľadanej množiny tiež patrí (obr. 8).



Obr. 8

Poznámka. Hľadaná množina bodov sa dá popísať analyticky bez toho, aby sme využili poznatok o Apollóniovej kružnici.

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 3. 2009. Miesto konania: Rajecká Lesná, Žilina.*)

Víťazi

1.	Michal SPIŠIAK	4 G Grösslingová, Bratislava	7	7	7	6	4	5	36
	Jakub UHRÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	7	7	7	5	4	6	36
3.	Michal HAGARA	3 G Jura Hronca, Bratislava	7	7	5	7	7	0	33
4.	Eduard EIBEN	4 G Poštová, Košice	7	7	3	7	4	3	31
5.	Peter CSIBA	4 ŠPMNDaG, Bratislava	7	7	7	4	1	0	26
6.	Martin BACHRATÝ	3 G Veľká okružná, Žilina	7	6	2	6	3	0	24
7.	Filip SLÁDEK	3 G A. Bernoláka, Námestovo	7	1	2	7	4	2	23
8.	Ján HOZZA	2 G Jura Hronca, Bratislava	7	7	1	1	4	2	22

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Tomáš KUZMA	4 G Alejová, Košice	7	0	7	5	2	0	21
	Vincent LAMI	3 G H. Selyeho, Komárno	7	7	1	2	0	4	21
11.	Peter FULLA	4 SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves	7	1	2	3	4	3	20
12.	Ladislav BAČO	3 G Poštová, Košice	7	3	0	2	4	1	17
	Albert HERENCSÁR	4 G Z. Kodálya, Galanta	7	3	0	0	2	5	17
	Tomáš SZANISZLO	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7	3	0	5	0	2	17
15.	Tomáš BELAN	3 ŠPMNDaG, Bratislava	7	2	3	3	0	1	16
	Radomír BOSÁK	4 G Grösslingová, Bratislava	7	0	1	6	2	0	16
	Nikola HRDÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	7	7	0	2	0	0	16
	Natália KARÁSKOVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	7	1	4	1	2	1	16
	Fridrich VALACH	4 G Ľ. J. Šuleka, Komárno	7	1	2	4	2	0	16

Ostatní riešitelia

20.	Lenka MATEJOVIČOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	7	0	5	0	3	0	15
	Peter SLUKA	4 G Ľ. Štúra, Zvolen	7	0	4	0	0	4	15
22.	Michal HOJČKA	4 G Partizánske	7	0	6	1	0	0	14
	Martin UKROP	3 G Ľ. Štúra, Zvolen	7	0	3	0	2	2	14
24.	Igor KOSSACZKÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	7	1	3	0	2	0	13
	Marek KUKAN	3 G Grösslingová, Bratislava	7	3	0	2	0	1	13
	István PARASZTI	4 G H. Selyeho, Komárno	7	2	1	2	0	1	13
	Marián PAULÍK	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7	0	1	5	0	0	13
28.	Jakub JURSA	4 G Alejová, Košice	7	0	1	2	1	0	11
29.	Jakub KONEČNÝ	3 G Grösslingová, Bratislava	7	0	1	2	0	0	10
	Martin ŠIMO	4 G Grösslingová, Bratislava	0	4	0	6	0	0	10
	Ivana TONHAUSEROVÁ	3 G Párovská, Nitra	7	0	1	0	2	0	10
32.	Matúš IVAN	4 G Kukučínova, Poprad	0	0	1	5	2	0	8
33.	Jozef FEKIAČ	4 G Grösslingová, Bratislava	0	1	2	1	1	0	5
34.	Georgios CHALIVOPULOS	3 G Jura Hronca, Bratislava	2	0	1	0	0	0	3
	Michal MAIXNER	4 G Varšavská, Žilina	0	3	0	0	0	0	3
36.	Marek BEHÚN	3 G Ľ. Štúra, Michalovce	0	0	0	0	0	2	2
	Jozef JAŠŠ	4 G L. Stockela, Bardejov	0	0	1	0	0	1	2
	Andrej KREJČÍR	2 G V. B. Nedožerského, Prievidza	0	0	1	0	0	1	2
39.	Zosia ORAVCOVÁ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	0	1	0	0	0	0	1

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	46	30	8	4	3	1	0
6 bodov	7	0	1	1	4	0	1
5 bodov	9	0	0	2	5	0	2
4 body	14	0	1	2	2	7	2
3 body	15	0	5	4	2	2	2
2 body	29	1	2	5	7	9	5
1 bod	33	0	7	12	4	3	7
0 bodov	81	8	15	9	12	17	20
Priemer	2,57	5,44	2,36	2,21	2,62	1,59	1,21

Jednota slovenských matematikov a fyzikov,
pobočka Bratislava 1,
Matematický ústav SAV, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava,
http://www.jsmf.eu.sk
e-mail: JSMF@centrum.sk

POZVÁNKA

Výbor pobočky JSMF Bratislava 1 si Vás dovoľuje pozvať na výročnú členskú schôdzu pobočky, ktorá sa bude konať **v utorok 9. júna 2009 o 15.30 hod.** v miestnosti B202 na 2. poschodí budovy Stavebnej fakulty STU (výťahom na 3. poschodie) na ul. I. Karvaša, Bratislava (bývalá Starohorská).

Program členskej schôdze:

1. Správa o činnosti pobočky za rok 2008
2. Správa o hospodárení pobočky za rok 2008
3. Revízna správa
4. Plán činnosti na rok 2009
5. Prednáška doc. RNDr. Daniely Velichovej, CSc. na tému:
   „Geometrické útvary a ich reprezentácie v geometrickom modelovaní“
6. Diskusia
7. Rôzne

Členský príspevok na rok 2009 je 6 €. Dôchodcovia a študenti nie sú povinní uhrádzať členský príspevok. Spolu s členským môžete zaplatiť aj predplatné členského časopisu *Obzory matematiky, fyziky a informatiky,* ktoré je 4 €. Členské príspevky je možné uhradiť bankovým prevodom na účet číslo **11466164/0900**. Žiaľ, poštové poukážky nemáme, nakoľko pošta po prechode na euro zmenila typ tejto poukážky. Pri platbe Vás prosíme, aby ste do správy pre prijímateľa uviedli za ktoré roky platíte členský poplatok a či ste odberateľom časopisu, príp. či ste dôchodca alebo študent. Tieto poplatky môžete uhradiť aj **v hotovosti** hospodárke pobočky RNDr. Darine Kyselovej, PhD. V prípade, že člen nemá uhradený členský príspevok za viac ako 3 roky, budeme nútení ho vylúčiť z evidencie členov JSMF.

Zároveň Vás chceme informovať o možnosti uhradenia cestovných nákladov spojených s účasťou na tradičnej konferencii JSMF v Jasnej pod Chopkom pre niekoľkých členov pobočky (podľa finančných možností). Podmienkou je riadne platenie členského príspevku za posledné 3 roky.

S pozdravom

Martin Kalina
predseda pobočky

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Abraham de Moivre – radil hazardným hráčom 1
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2008/2009 2
Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže..... 2
Výsledkové listiny po 1. sérii úloh 12
Matematická olympiáda 13
Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A 13
Výsledky celoštátneho kola kategórie A 20
Pozvánka na členskú schôdzu JSMF pobočky Bratislava 1 ..... 3. strana obálky

---

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Katarína Škrovinová
Tlač a väzba: Eduard Rác
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Adresa redakcie: MATMIX, Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, Štefánikova 49, 814 73 Bratislava
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Evidenčné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854
Náklad: 100 ks. Vychádza 4-krát ročne.
Cena: 0,83 € (25 Sk)

