Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2008/2009
Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Určte 2 009. číslicu v postupnosti 1234567891011121314... bez toho, aby ste celé číslo vypisovali.

2. Z číslic 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 vytvorte dva zlomky tak, aby sa ich súčet rovnal 1. Použite pritom všetky číslice a každú len raz.

3. Uvažujme všetky letiská v Európe. Z každého vzlietne v rovnakom čase jedno lietadlo a smeruje na najbližšie letisko. Predpokladajme, že všetky vzdialenosti medzi letiskami sú rôzne. Dokážte, že na každom letisku pristane maximálne 5 lietadiel.

4. Zistite, či existuje taká mocnina čísla 2, ktorá končí na dvojčíslie 22.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je číslo $3^{n+2}+4^{2n+1}$ deliteľné 13.

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *n* je kombinačné číslo $\binom{2n+1}{n}$ deliteľné číslom $2n+1$.

7. Dokážte, že existuje taký násobok čísla 2 009, ktorý obsahuje všetkých 10 číslic.

8. V akom pomere musia byť odvesny pravouhlého trojuholníka, aby jeho ťažnice tvorili tiež strany pravouhlého trojuholníka?

9. Dokážte, že postupnosť $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... konverguje a nájdite jej limitu.

10. Majme daných $2n$ rôznych bodov v rovine. Dokážte, že existuje taký kruh, ktorý pokrýva práve *n* z týchto bodov.

11. Určte hodnotu nekonečného súčinu

$$\left(1+2^{-1}\right)\left(1+2^{-2}\right)\left(1+2^{-4}\right)\left(1+2^{-8}\right)\cdots$$

12. Dokáže, že v desatinnom zápise čísla $\sqrt{2}$ existuje aspoň jedna nenulová číslica medzi miliónтym a trojmiliónтym desatinným miestom (vrátane oboch).

13. Nájdite všetky také postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel, pre ktoré $a_1 = 1$ a platí

$$|a_n - a_m| \leq \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

pre všetky prirodzené čísla *m* a *n*.

14. Nájdite všetky funkcie *f* definované na celých číslach, pre ktoré platí

$$f(n+m) + f(n-m) = 2\big(f(m) + f(n)\big)$$

pre všetky celé čísla *m*, *n*.

Termín odoslania riešení úloh 3. série klasickou poštou: do 12. 6. 2009

Riešenia zasielajte na adresu:

MATMIX
Doc. RNDr. Kalina Martin, CSc.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta STU
Radlinského 11
813 68 Bratislava

Termín odoslania riešení úloh 3. série e-mailom: do 15. 6. 2009

Riešenia zasielajte na e-mailovú adresu: **matmix@matmix.sk**