Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Na troch poličkách stoja fľaše troch veľkostí. Na prvej jedna veľká, tri stredne veľké a tri malé, na strednej poličke sú dve veľké a šesť malých a na poslednej polici sú štyri stredne veľké a šesť malých. Na všetkých poličkách je objem fliaš rovnaký. Malá fľaša má objem pol litra. Koľko litrov je na každej poličke a aký objem má veľká a stredne veľká fľaša?

2. Dĺžky strán trojuholníka *ABC* sú v pomere 3 : 4 : 5. Trojuholník *KLM*, ktorého vrcholy sú stredmi strán trojuholníka *ABC*, má obvod 3,6 metra. Určte dĺžky strán trojuholníka *ABC*.

3. Tri dievčatá mali spolu 96 koráliek, ktoré si navzájom vymieňali. Prvé dievča dalo druhému toľko koráliek, koľko malo druhé. Druhé dalo tretiemu toľko, koľko malo tretie, a nakoniec dalo tretie prvému toľko, koľko ich práve malo prvé dievča. Po takejto výmene budú mať všetky tri rovnako koráliek. Koľko koráliek malo každé dievča pred výmenou?

4. Myslím si číslo. Odčítam od neho jeho štvrtinu a od rozdielu odčítam 3. Dostanem to isté číslo, ako keď dvojnásobok mysleného čísla vydelím číslom 5 a k číslu, ktoré dostanem, pripočítam 4. Aké číslo som si myslel?

5. V jednom rade stojí za sebou 74 písmen, každé z nich je E alebo F. Nikde za sebou nestoja 3 písmená E, ani 4 písmená F. Koľko najmenej a koľko najviac písmen E a F môže byť v takomto rade?

6. Vonkajšie spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa ich dotýkajú v štyroch navzájom rôznych bodoch. Dokážte, že tieto štyri body sú vrcholmi tetivového štvoruholníka.

7. 29. februára 1896 hovorila istá dáma jednému pánovi: Keď uvážime, že ste boli presne trikrát starší ako ja, keď sme sa prvýkrát stretli, že potom som ja práve dnes taká stará, ako ste boli vtedy vy, a že keď budem mať trikrát viac rokov ako dnes, budeme mať obaja spolu 100 rokov, môžete mi určiť, koľko budete mať rokov najbližšieho 29. februára? Dokážete to aj vy?

8. Stred pravidelného päťuholníka *ABCDE* označme *F* a spojme ho s vrcholmi tohto päťuholníka. Spojme aj dvojice bodov *AB*, *BC*, *CD*, *DE* a *EA*. Aký je najmenší

počet farieb, ktorými sa dajú ofarbiť body *A*, *B*, *C*, *D*, *E* a *F* tak, aby žiadne dva spojené vrcholy nemali rovnakú farbu?

9. Aký je polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca, ktorého uhlopriečky majú dĺžky 6 a 8 cm?

10. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 004 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 003-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 003.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 7. 4. 2010

Riešenia zasielajte na adresu:

P-MAT, n. o.
Ing. Mgr. Martin Hriňák
P. O. BOX 2
814 99 Bratislava 1