Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2009/2010

Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Na drevenom plote je 70 latiek. Paľko s Aničkou ich mali všetky ponatierať farbou. Začali aj skončili obaja naraz. Kým Anička natrela dve latky, prešli 4 minúty, Paľko stihol za 8 minút ponatierať tri latky. Ako dlho im trvalo natretie všetkých latiek?

Riešenie: Anička s Paľkom natierali plot x minút. Anička natrela dve latky za 4 minúty, teda jednu latku stihla natrieť za dve minúty. Za x minút ponatierala $\frac{x}{2}$ latiek. Paľko natrel tri latky za 8 minút, takže za x minút stihol natrieť $\frac{3x}{8}$ latiek. Preto platí:

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{8}=70,$$
$$4x+3x=560,$$
$$x=80.$$

Natretie všetkých latiek im trvalo 80 minút.

2. Michal išiel na návštevu na motocykli. Keď prešiel polovicu cesty a 1 km, dostal defekt. Opravil ho a išiel ďalej. Zo zvyšku prešiel opäť polovicu a 1 km a znovu dostal defekt. Opravil ho a do cieľa mu chýbalo 8 km. Aká dlhá bola cesta?

Riešenie: Cesta je dlhá x km. Michal prešiel $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ km, kým dostal prvý defekt. Do cieľa mu vtedy zostávalo ešte $x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\left(\frac{x}{2}-1\right)$ km. Z tejto vzdialenosti prešiel $\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)}{2}+1=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$ km a znovu dostal defekt. Do cieľa mu chýbalo 8 km. Dostávame rovnicu s jednou neznámou:

$$x=\left(\frac{x}{2}-1\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)+8$$

Jej vyriešením zistíme, že cesta bola dlhá 38 km.

3. Ak k dvojcifernému číslu pripíšeme sprava a aj zľava cifru 1, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 21-krát väčšie ako pôvodné dvojciferné číslo. Vypočítajte hľadané dvojciferné číslo.

Riešenie: Nech hľadané dvojciferné číslo je $\overline{ab}=10a+b$, pričom a a b sú cifry a a je nenulové. Keď k nemu zľava aj sprava pripíšeme cifru 1, dostaneme číslo

$$\overline{1ab1}=1000+100a+10b+1=1001+10\big(10a+b\big).$$

Toto číslo má byť 21-krát väčšie ako pôvodné, preto musia platiť nasledujúce rovnosti:

$$\begin{aligned}21\big(10a+b\big)&=1001+10\big(10a+b\big),\\ 11\big(10a+b\big)&=1001,\\ \big(10a+b\big)&=91.\end{aligned}$$

Hľadané dvojciferné číslo je 91.

4. Na piatich kôpkach je spolu 230 kníh. Vieme, že na druhej kôpke je dva razy viac kníh ako na prvej kôpke, na tretej je viac kníh ako na druhej kôpke a štvrtá kôpka má o 12 kníh viac ako piata kôpka. Koľko kníh môže byť na jednotlivých kôpkach, ak na každej z nich je viac ako 30 kníh?

Riešenie: Počty kníh na prvej až piatej kôpke si označme a, b, c, d, e v tomto poradí. Zo zadania vieme, že platí

$$\begin{aligned}b&=2a,\\ c>b&=2a,\\ d&=e+12,\\ a&>30,\\ c&>30,\\ e&>30.\end{aligned}$$

Ich sčítaním dostaneme rovnicu

$$a+2a+c+\big(e+12\big)+e=3a+c+2e+12=230,$$

kde a, c, e sú prirodzené čísla. Ak by a bolo 32 alebo viac, tak c by muselo byť viac ako $2\cdot 32=64$, teda aspoň 65. Potom ľavá strana rovnice by bola aspoň

$$3\cdot 32+65+2\cdot 31+12=235,$$

čo je viac ako 230. Preto $a=31$.

Potom c je aspoň $2\cdot 31+1=63$. Ak by e bolo 32 alebo viac, tak ľavá strana rovnice by bola aspoň

$$3\cdot 31+63+12+2\cdot 32=232,$$

čo je viac ako 230. Preto $e=31$. Z toho vyplýva, že

$$c = 230 - 3a - 2e - 12 = 230 - 3 \cdot 31 - 2 \cdot 31 - 12 = 63.$$

Jediné riešenie úlohy je $a = 31$, $b = 62$, $c = 63$, $d = 43$, $e = 31$, teda na prvej kôpke bolo 31 kníh, na druhej 62, na tretej 63, na štvrtej 43 a na piatej 31.

Komentár: Úloha nevyžadovala riešenie žiadnych rovníc a dala sa riešiť úvahou o možných počtoch kníh na jednotlivých kôpkach, ako bolo uvedené počas riešenia.

5. Určte najmenšie prirodzené číslo n, ktoré má aspoň osem rôznych kladných deliteľov, pre ktoré je číslo $3n^2 + 3n + 2$ násobkom čísla 5.

Riešenie: Nech n dáva po delení piatimi zvyšok z (môže to byť 0, 1, 2, 3 alebo 4). Teda n vieme napísať v tvare $n = 5k + z$, kde k je nejaké prirodzené číslo alebo nula. Po dosadení tohto výrazu do $3n^2 + 3n + 2$ zistíme, aký zvyšok po delení piatimi dáva číslo $3n^2 + 3n + 2$, ak n dáva po delení piatimi zvyšok z. Napríklad pre $z = 1$ dostaneme:

$$3(5k+1)^2 + 3(5k+1) + 2 = 3\left(25k^2 + 10k + 1\right) + 3(5k+1) + 2 =$$
$$= 75k^2 + 30k + 3 + 15k + 3 + 2 = 5\left(25k^2 + 9k + 1\right) + 3.$$

To znamená, že ak $n = 5k + 1$, tak $3n^2 + 3n + 2$ dáva zvyšok 3 po delení piatimi. Rovnakým spôsobom môžeme zistiť, aký zvyšok po delení piatimi dáva číslo $3n^2 + 3n + 2$ pre všetky možné z. Zistíme, že $3n^2 + 3n + 2$ je deliteľné piatimi len pre $z = 2$. Teda n môže byť 2, 7, 12, 17, 22, ... Vypísaním všetkých deliteľov týchto čísel prídeme na to, že najmenšie z nich, ktoré má aspoň osem deliteľov, je 42.

6. Tri celé čísla a, b, c spĺňajú rovnicu $28a + 30b + 31c = 365$. Určte najmenšiu možnú kladnú hodnotu čísla $c - 2a$.

1. riešenie: Označme k najmenšiu kladnú hodnotu, ktorú môže nadobudnúť výraz $c - 2a$. Potom $2a = c - k$. To si môžeme dosadiť do rovnice

$$365 = 28a + 30b + 31c = 14(2a) + 30b + 31c = 14(c - k) + 30b + 31c =$$
$$= 14c - 14k + 30b + 31c = 45c + 30b - 14k.$$

Dostaneme, že platí:

$$45c + 30b = 365 + 14k$$
$$15(3c + 2b) = 365 + 14k.$$

Ľavá strana rovnice je deliteľná 15-timi, teda aj pravá strana musí byť deliteľná 15-timi. 365 dáva zvyšok 5 po delení 15, 14 dáva zvyšok 14 (teda –1) po delení 15. Najmenšie možné k je preto 5. Môžeme ho dosiahnuť napríklad pre trojicu $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$.

2. riešenie: Rovnosť $28a + 30b + 31c = 365$ môžeme napísať aj ako

$$30(a + b + c) + c - 2a = 365.$$

Keďže a, b, c sú celé čísla, je aj číslo $a + b + c$ celé. To znamená, že maximálna hodnota výrazu $30(a + b + c)$ je 360 a minimálna hodnota čísla $c - 2a$ je 5. To, že túto hodnotu môžeme dosiahnuť sa opäť presvedčíme rovnakou trojicou ako v prvom riešení.

7. Je dané prirodzené číslo n. Určte poslednú číslicu čísla n^2, ak je 7 jeho predposlednou číslicou.

Riešenie: Zapíšme si číslo n v tvare

$$n = 100k + 10l + m,$$

kde l a m sú posledné dve cifry čísla n a k je nezáporné celé číslo (jednoduchým vyskúšaním všetkých možností zistíme, že n nemôže byť jednociferné číslo). Po umocnení čísla n na druhú dostávame, že

$$n^2 = (100k + 10l + m)^2 = 100(100k^2 + 20kl + l^2 + 2km) + 20lm + m^2,$$

čo znamená, že posledné dve cifry čísla n^2 závisia len od hodnoty výrazu $20lm + m^2$. Ak je cifra na mieste desiatok čísla m^2 párna, tak aj predposledná cifra čísla n^2 párna, pretože číslo $2lm$ je tiež párne. Nepárnu cifru na mieste desiatok má z druhých mocnín jednociferných čísel jedine 4 a 6. Keďže v oboch prípadoch je potom posledná cifra čísla n^2 číslica 6, je číslo 6 hľadaným riešením úlohy.

Komentár: Úloha sa dala riešiť aj drevorubačským spôsobom – umocnením všetkých dvojciferných čísel a zistením príslušnej poslednej cifry vyhovujúcich čísel.