# Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

**1.** Ideálny muž podľa Martiny je vysoký, čiernovlasý a pekný. Pozná štyroch mužov, ktorí sa volajú Andrej, Boris, Cyril a Daniel. Len jeden z nich má všetky tri vlastnosti, ktoré Martina požaduje. Okrem toho vieme, že:
- Len traja muži sú vysokí, len dvaja čiernovlasí a len jeden pekný.
- Každý z tých štyroch mužov má aspoň jednu z požadovaných vlastností.
- Andrej a Boris majú rovnakú farbu vlasov.
- Boris a Cyril sú rovnako vysokí.
- Spomedzi Cyrila a Daniela je vysoký najviac jeden.

Ktorý z týchto štyroch mužov spĺňa všetky Martinine požiadavky?

**Riešenie:** Keďže Boris a Cyril sú rovnako vysokí, tak musia byť obaja vysokí, pretože v opačnom prípade by neboli vysokí dvaja, čo by bolo v protiklade s prvou podmienkou v zadaní. Keďže vieme, že Cyril je vysoký, na základe 5. podmienky vieme, že Daniel nie je vysoký. Keďže vysokí sú traja, Adam je tiež vysoký. Ak by Adam a Boris boli čiernovlasí, tak pekný by musel byť Daniel, keďže nie je ani čiernovlasý ani vysoký a musí mať aspoň jednu z vlastností. To by znamenalo, že žiaden z nich nemá všetky tri vlastnosti, čo by bolo v rozpore so zadaním. Preto musia byť čiernovlasí Cyril a Daniel. Keďže Daniel nie je vysoký, nemôže mať všetky tri vlastnosti, a teda nemôže byť pekný. Preto musí byť pekný Cyril, ktorý má na základe vyššie uvedeného všetky tri požadované vlastnosti.

**2.** Otec sa v záhrade rozhodol postaviť altánok. Keby každý deň pracoval 1,5 hodiny, celá stavba by mu trvala 8 dní. Koľko hodín denne by musel pracovať, aby bola stavba hotová o dva dni skôr?

**Riešenie:** Celkový čas, ktorý strávi otec pri práci na altánku, je $8 \cdot 1{,}5 = 12$ hodín. Ak chceme, aby bola práca hotová o dva dni skôr, otec bude pracovať len 6 dní. Keďže $12 : 6 = 2,$ otec by musel pracovať dve hodiny denne.

**3.** Ak ide mág Xerius navštíviť priateľa pešo a naspäť sa vezie na voze, trvá mu cesta hodinu a pol. Ak ide na voze tam i nazad, trvá mu celá cesta 30 minút. Koľko mu trvá cesta, ak ide tam aj späť pešo? (Pešo aj vozom ide rovnomerným priamočiarym pohybom.)

**Riešenie:** Xeriovi trvá cesta na voze k priateľovi rovnako dlho ako cesta naspať, pretože sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom. Tam aj naspäť mu to na

voze trvalo 30 minút. Teda cesta na voze od priateľa mu trvala 15 minút. To znamená, že cesta pešo k priateľovi mu trvala hodinu aj štvrť, pretože keď k nemu šiel pešo a naspäť sa viezol na voze, trvala mu cesta hodinu a pol. Ak by išiel tam aj naspäť pešo, trvalo by mu to dvakrát toľko, čiže 2,5 hodiny.

**4.** Do uzavretej nádrže tvaru pravidelného štvorbokého hranola sa má zmestiť 20 hl vody. Výška nádrže je 1,26 m. Koľko štvorcových metrov plechu sa spotrebuje na jej vyhotovenie, keď pridáme 5 % plechu na spoje a odpad?

**Riešenie:** Predpokladajme, že dĺžka hrany základne je $x$ metrov. 20 hl predstavuje objem 2 metre kubické. Potom pre objem nádrže platí $2 = 1{,}26 \cdot x^2$, odkiaľ vypočítame, že $x \doteq 1{,}26$ m. To znamená, že ide o nádrž tvaru kocky s hranou dĺžky 1,26 m. Pre jej povrch platí (započítali sme už aj 5 % na spoje a odpad):

$$S = 1{,}05 \cdot 6 \cdot x^2 = 1{,}05 \cdot 6 \cdot (1{,}26\ \text{m})^2 = 10{,}00188\ \text{m}^2.$$

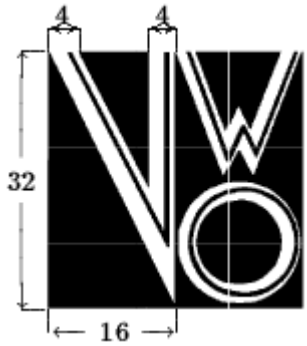
Ak by sme počítali presnejšie bez zaokrúhľovania, získali by sme výsledok približne 10,000637 metrov štvorcových, takže pri presnosti na metre štvorcové je odpoveďou 10 metrov štvorcových.

**5.** Nájdite osemciferné číslo (označme si ho *X*), pre ktoré platí: *X* sa skladá len z cifier 1, 2, 3 a 4. Keď *X* rozdelíme v polovici na dve štvorciferné čísla a potom pravé odpočítame od ľavého, dostaneme 2222. Keď od *X* odpočítame *X* napísané odzadu, dostaneme 33108867. Nájdite všetky riešenia.

**Riešenie:** Rozdielom dvoch kladných osemciferných čísel je maximálne osemciferné číslo. Keďže prvá cifra *X* je maximálne 4 a posledná minimálne 1, tak aby sme dostali rozdiel 3, jedinou možnosťou je, že prvá cifra bude 4 a posledná 1. Ak by nastal prípadný prechod cez desiatku, tak by sme mohli dostať menej ako 8-ciferné číslo. Podobne dostaneme, že druhá cifra *X* je tiež 4 a predposledná 1.

Teraz využijeme, že keď *X* rozdelíme v polovici na dve štvorciferné čísla a potom pravé odpočítame od ľavého, dostaneme 2222. Keďže posledné dve cifry čísla *X* sú 11, tak posledné dve cifry ľavej polovice čísla *X* musia byť 33. Potom sa ale pravá časť čísla *X* rovná $4433 - 2222 = 2211$, a teda číslo *X* sa rovná 44332211. Skúškou overíme, že toto číslo spĺňa požiadavky zo zadania.

**6.** Vypočítajte plochu, ktorú zaberá písmeno V na nasledujúcom obrázku:




**Riešenie:** Písmeno V je celé v ľavej časti štvorca. Túto časť tvorí obdĺžnik s rozmermi 32 x 16. Dokonca ľahko nahliadneme, že zaberá len polovicu tohto obdĺžnika. Keďže obdĺžnik má strany s dĺžkami 16 a 32, jeho polovica bude mať obsah $16 \cdot 16 = 256$.

Vnútri písmena V je ešte jeden čierny trojuholník, ktorý je podobný trojuholníku, ktorý ohraničuje písmeno V. Keďže jeho najkratšia strana má dĺžku $16 - 4 - 4 = 8$, čo je polovica dĺžky strany prislúchajúceho veľkého trojuholníka, jeho obsah bude štvrtinový, teda $\frac{1}{4} \cdot 256 = 64.$

Obsah písmena V bude preto $256 - 64 = 192.$

**7.** Dokážte, že číslo $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ je prirodzené.

**Riešenie:** Ľahko nahliadneme, že $17 - 12\sqrt{2} > 0.$ Vyplýva to z toho, že keď dáme $12\sqrt{2}$ na druhú stranu nerovnice a umocníme ju na druhú, dostaneme ekvivalentné tvrdenie $289 > 288,$ ktoré je pravdivé. Preto je odmocnina dobre definovaná v reálnych číslach, a teda uvedené číslo je reálne. Keďže odmocnina je nezáporná, uvedené číslo je tiež nezáporné, pretože je súčtom dvoch nezáporných čísel. Označme jeho hodnotu $x$. Po umocnení na druhú dostávame, že platí:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}, \\
x^2 &= 17 - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + 17 + 12\sqrt{2}, \\
x^2 &= 34 + 2 \cdot \sqrt{289 - 288}, \\
x^2 &= 34 + 2 \cdot 1, \\
x^2 &= 36, \\
|x| &= 6, \\
x &= 6,
\end{aligned}$$

pričom v poslednom kroku sme využili to, že $x$ je nezáporné. Tým, sme dokázali, že číslo $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ je prirodzené a našli sme aj jeho hodnotu.

**8.** Nájdite všeobecné vyjadrenie pre $n$-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanej nasledujúcim predpisom:

$$a_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}.$$

**Riešenie:** Výpočtom niekoľkých prvých členov tejto postupnosti zistíme, že by mohlo platiť

$$a_n=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Tento predpoklad dokážeme matematickou indukciou. Pre $n=1$ dostávame, že platí

$$a_1=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2!},$$

teda vzťah platí.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $n$. Dokážeme, že platí aj pre Podľa vzťahu v zadaní platí

$$a_{n+1}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}.$$

Využitím indukčného predpokladu dostaneme, že platí

$$a_{n+1}=1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=1-\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+2)!}=1-\frac{1}{(n+2)!},$$

čo sme chceli dokázať.