Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1

Ročník: 17
Číslo: 3 – 4
Šk. rok: 2011/2012

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika je najmohutnejšia a najvznešenejšia veda, ktorá odkrýva ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody.

S. V. Kovalevská

Redakčná pošta

Milí čitatelia!

17. ročník vydávania časopisu sa práve končí a dostávate do rúk jeho posledné číslo. Úspešným riešiteľov korešpondenčnej súťaže blahoželáme – tento rok bola súťaž veľmi vyrovnaná, keďže prví traja riešitelia získali rovnaký počet bodov (a každý iným spôsobom) – a zasielame im 3 diely publikácie Metódy riešenia matematických úloh.

Vzhľadom na neustály nárast nákladov na vydávanie časopisu sme boli nútení pristúpiť k zvýšeniu ceny za odoberanie časopisu na 1,35 € za jedno číslo. Pre súčasných stabilných predplatiteľov však ponúkame možnosť odoberania časopisu aj v budúcom školskom roku za nezmenenú cenu – 1 € za jedno číslo. Robíme však všetko preto, aby sme získali dotáciu Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu na vydávanie periodickej tlače. Ak budeme úspešní, určite o tom napíšeme aj na našej webovej stránke.

Aj v budúcom roku platí naša špeciálna ponuka pre hromadný odber časopisu – v prípade, že si na školu objednáte aspoň 10 kusov časopisu, môžete si ako bonus vybrať jednu z kníh Metódy riešenia matematických úloh a Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky, ktoré sme pred niekoľkými rokmi vydali.

Želám vám príjemné prežitie prázdnin a teším sa na stretnutie opäť v nasledujúcom školskom roku.

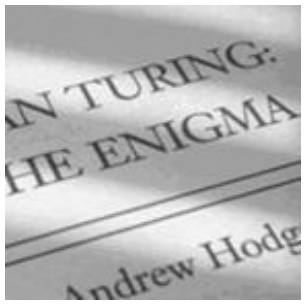
Martin Hriňák

Alan Turing



Kultúrne dejiny ľudstva už dlho poznajú rôzne spôsoby utajovania. Šifrované správy rozhodovali o osude štátov i jednotlivcov. Z kryptológie sa vyvinula veda s počítačovým vybavením a nezanedbateľným matematickým softvérom. K matematikom, ktorí prispeli k tvorbe šifrovacieho prístroja (AGNES), patrí **Alan Mathison Turing** (23. 6. 1912 – 7. 6. 1954), priekopník zostrojenia elektronických samočinných počítačov

Mal veľmi vzdelaných rodičov, ktorí sa zosobášili v Indii. Školu navštevoval v Sherborne a potom študoval matematiku na univerzite v Cambridgei. Bol kritizovaný za svoj rukopis, zápasil s angličtinou, z chémie si robil vlastné experimenty, mal svoj myšlienkový svet, v ktorom mali svoje miesto aj teória relativity a kvantová mechanika. V roku 1934 promoval, stal sa členom Kráľovského kolégia (1935) a obhajoval dizertačnú prácu na tému Základná limitná veta pravdepodobnosti. V rokoch 1936 – 1938 študoval na univerzite v Princetone (doktorát u A. Churcha). Počas 2. svetovej vojny bol aj dôstojníkom pre dekódovanie. Od roku 1945 pracoval v národnom fyzikálnom laboratóriu. Neskôr prešiel na univerzitu do Manchesteru. V roku 1951 sa stal členom Londýnskej kráľovskej spoločnosti. V roku 1952 bol väznený za násilné protesty proti obmedzeniam britských homosexuálov. Nečakaná smrť prišla 7. júna 1954 vo Wilmslowe. Vyšetrovanie určilo za príčinu smrti samovraždu otrávením sa kyanidom. Jeho matka tvrdila, že to bola nehoda.



Turing venoval pozornosť matematickej logike a teórii rekurzívnych funkcií. V práci *On Computable Numbers* (O počítateľných číslach) vypracoval teóriu algoritmov. Súčasne s E. S. Postom publikoval Turing teóriu abstraktného počítača, v ktorej vysvetlil funkčné procesy počítačového automatu (1936). V roku 1947 zverejnil pojednanie *Mysliaci stroj – kacírska teória*, v ktorom uvažoval o učiacom sa stroji a umelej inteligencii. V roku 1950 sa zaoberal biologickými javmi a ich vysvetlením matematickým a algoritmickým opisom.

Zariadenie obsahuje hlavicu a pásku. Hlavica je mechanizmus, ktorý v každom okamihu ukazuje na jedno okienko pásky. Stroj má možnosť posunu o jedno okienko doľava a doprava. V okienkach môžu byť zapísané symboly konečnej abecedy. Páska prechádza čítacou hlavicou, ktorá priradí riadiacej jednotke pre každý okamih jeden z možných stavov. Jednotka obsahuje program, ktorý určuje podľa konkrétneho stavu nový stav. Takto bol opísaný model abstraktného programovacieho stroja na spracovanie symbolov.



Alan Mathison Turing prispel k riešeniu problémov efektívne vyčísliteľných funkcií, aproximácií Lieových grúp i teórie Riemannovej zeta funkcie. Spresnil intuitívny pojem algoritmu a rozvinul metódy riešenia algoritmizovateľných problémov. Podieľal sa na realizácii prvého anglického počítača a jeho programového vybavenia. Predpokladal, že stroje môžu imitovať myšlienkové procesy, generovať odpovede mimo rámca ohraničenej množiny možností, prejaviť umelú inteligenciu. Presvedčil seba aj ostatných, že principiálna možnosť riešenia ľubovoľného algoritmizovateľného problému je technicky reálna.

Dušan Jedinák

Carl Friedrich Weizsäcker



Pochádzal z rodiny diplomata ministerstva zahraničia. Vyštudoval fyziku na univerzite v Berlíne, Göttingene a Lipsku (1929 – 1933). Nemecký fyzik, filozof, teoretik vedy a mnohostranný mysliteľ **Carl Friedrich Weizsäcker** (28. 6. 1912 – 28. 4. 2007) už v mladosti vytušil, že človek a príroda sú nejakým spôsobom spojené. Chcel pochopiť štruktúru času, spoznal priepasť neoddeliteľnosti subjektu a objektu v kvantovej fyzike. Skúmal možnosť výroby atómovej bomby. Zažil aj hľadanie vlastnej náboženskej skúsenosti (ovplyvnený novozákonnou *Rečou na hore* spoznal indikatív blahoslavenstiev na rozdiel od imperatívu príkazov). Zapojil sa do celosvetového ekumenického hnutia. V roku 1956 podpísal výzvu proti jadrovému vyzbrojeniu Nemecka. Stal sa vedúcim katedry filozofie na univerzite v Hamburgu (1957 – 1969). Viedol Ústav Maxa Plancka pre výskum budúcnosti (1970 – 1980). Bol na konferencii *Politika a etika* v Bratislave v roku 1991. Z diela: *Dejiny prírody, Zodpovednosť vedy v atómovom veku, Dosah vedy, O slobode, Čas súri, Čas a jedno. Zdá sa, že nemusíme poprieť vieru pre poznanie, nemusíme poprieť boha, aby sme zachránili človeka.* Zosúladenie prírodovedného poznania a náboženskej zjavenej skúsenosti môže viesť k hlbšiemu porozumeniu vedy i kresťanstva.

Z myšlienok:

- *Človek sa snaží vniknúť do skutočnosti prírody, ale v jej poslednom neuchopiteľnom pozadí vidí neočakávane, ako v zrkadle, sám seba.*

- *Klasická fyzika bola nahradená kvantovou teóriou. Kvantová teória je overená experimentálne. Experimenty musia byť opisované v rámci klasickej fyziky.*
- *Matematika je skúmanie najvšeobecnejších možných štruktúr, nech sú dané priestorovo, časovo alebo dokonca len čisto pojmovo.*
- *Fyzika nevysvetľuje tajomstvo prírody, ale vedie späť k hlbšiemu tajomstvu.*
- *Len človek je dejinnou bytosťou... Dejiny – to je meno jednej z najdôležitejších duchovných vied... Dejiny sú len tam, kde je zmena... Prírodu jej dejiny postihujú, ale príroda ich nepociťuje... Človek má vedomie a skúsenosť.*
- *Človek, ktorý sa domnieva, že môže byť bez náboženstva, obvykle upadne do nejakého nižšieho náboženstva.*
- *Teológovia majú skutočnú pravdu, ktorá ide viac do hĺbky ako vedecká pravda nášho atómového veku. Vedomosti teológov o podstate človeka majú hlbšie korene ako racionálne odvodenia modernej vedy.*
- *Vedecký a technický svet novoveku je výsledkom smelého pokusu, ktorý je poznaním bez lásky... Ľudský svet vždy obstál len preto, že boli iní, ktorí v sebe cítili výzvu pýtať sa na zmysel všetkého a konať so zodpovednosťou za celok.*
- *Existencia je neuspokojený smäd po bytí a pôžitku, ktoré prináša nikdy nekončiace utrpenie... Zúfalstvo je otázka, na ktorú často odpovedá boh.*
- *Tolerancia ako neutralita voči pravde je zhubná... Tolerancia ako tvorba priestoru, v ktorom možno pravdu nájsť a prijať, je nevyhnutná.*
- *V prírode nie je dvojitosť, ale my to isté vidíme dvojitým spôsobom.*
- *Plodne sa nedotýkajú urýchlené kompromisy, ale práve extrémy.*
- *Bytie je staršie než poznanie, ale až poznanie vie, čo je bytie.*
- *Ak nám poznanie bráni v láske, musíme sa poznania vzdať.*
- *Špecifikom európskej kultúry je predovšetkým trojaké antické dedičstvo: grécke myslenie, kresťanská viera, rímske právo.*





Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2011/2012

Riešenia úloh 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Máme k dispozícii dve vedrá, jedno 17-litrové a druhé 9-litrové, a neobmedzený zdroj vody. Vašou úlohou je do 17-litrového vedra naliať presne 13 litrov vody.

Riešenie: V prvom kroku nalejeme zo zdroja vody 9 litrov vody do 9-litrového vedra a prelejeme z neho všetku vodu do 17-litrového vedra. Opäť naplníme 9-litrové vedro

do plna a prelejeme do 17-litrového vedra toľko, aby sa 17-litrové vedro naplnilo do plna. Keďže v ňom už bolo 9 litrov vody, zmestí sa tam ešte 8 litrov. V 9-litrovom vedre nám preto ostane 1 liter vody.

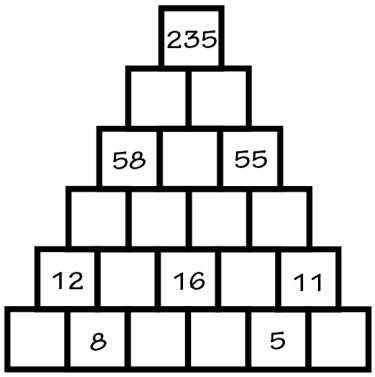
Teraz vylejeme všetku vodu zo 17-litrového vedra a prelejeme doň 1 liter z 9-litrového vedra. Teraz naplníme 9-litrové vedro doplna a prelejeme 9 litrov do 17-litrového vedra. Opäť naplníme 9-litrové vedro a nalejeme do 17-litrového vedra toľko vody, koľko sa doň zmestí. Keďže tam už bolo 1 + 9 = 10 litrov vody, zmestí sa tam ešte 7 litrov vody a v 9-litrovom vedre nám ostanú 2 litre vody.

Opäť vylejeme vodu zo 17-litrového vedra a prelejeme tam vodu z 9-litrového vedra, teda 2 litre. Tento postup zopakujeme ešte dvakrát a dostaneme v 17-litrovom vedre 4 litre vody.

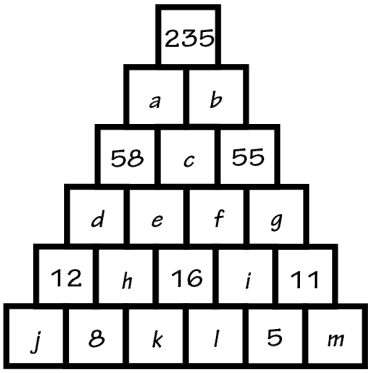
Potom už len napustíme do 9-litrového vedra 9 litrov vody a prilejeme ich k tým štyrom a dostaneme v 17-litrovom vedre 13 litrov vody, čo bolo našou úlohou.

Komentár: Pri riešení sa vyskytli chyby v komentári v tom, že nie vždy bolo jasné, odkiaľ sa voda nalieva – či zo zdroja alebo z druhého vedra, čo mohlo viesť k strate jedného bodu.

2. Doplňte pyramídu tak, aby platilo, že každý prvok je súčet tých dvoch, ktoré sa nachádzajú pod ním (okrem posledného riadku):



Riešenie: Neznáme čísla v pyramíde si označíme *a* až *m*.



Čísla j a m určíme ľahko, lebo musí platiť $j+8=12$, teda $j=12-8=4$, resp. $5+m=11$, teda $m=11-5=6$. Pozrime sa teraz na vrchné tri poschodia pyramídy. Platí:

$$235=a+b,$$
$$a=58+c,$$
$$b=c+55.$$

Dosadením 2. a 3. rovnice do prvej dostávame, že platí

$$235=(58+c)+(c+55)=113+2c.$$

Z toho dostaneme, že platí

$$c=\frac{235-113}{2}=61.$$

Potom už vieme dopočítať a a b:

$$a=58+61=119,$$
$$b=61+55=116.$$

Neznáme d, e, h určíme rovnakým spôsobom ako neznáme a, b, c, pretože platí

$$58=d+e,$$
$$d=12+h,$$
$$e=h+16.$$

Analogicky dostávame, že platí

$$58=(12+h)+(h+16)=28+2h,$$

z čoho dostaneme, že platí

$$h=\frac{58-28}{2}=15.$$

Potom

$$d=12+15=27,$$
$$e=15+16=31.$$

Podobne pre neznáme f, g, i platí:

$$55=f+g,$$
$$f=16+i,$$
$$g=i+11.$$

Potom musí platiť aj

$$55=(16+i)+(i+11)=27+2i,$$

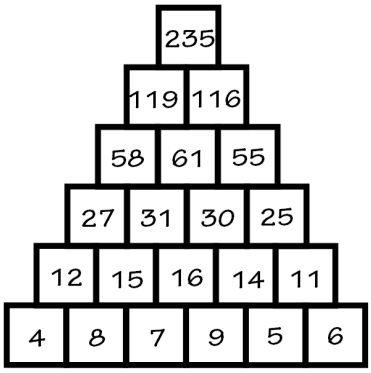
z čoho dostaneme, že platí

$$i=\frac{55-27}{2}=14.$$

Potom

$$f=16+14=30,$$
$$g=14+11=25.$$

Už chýbajú len neznáme k a l v poslednom riadku. Má platiť $8+k=15$, teda $k=15-8=7$, a $l+5=14$, čiže $l=14-5=9$. Pyramída po vyplnení vyzerá takto:



3. Určte dĺžku a šírku obdĺžnikovej záhrady, keď viete o nej tieto informácie: Keby šírka zostala taká, aká je, a dĺžka by bola 30 metrov, bol by obsah o 120 m^2 menší než v skutočnosti. Pri nezmenenej šírke a dĺžke 40 m by mala záhrada obsah o 80 m^2 väčší než skutočne má.

Riešenie: Dĺžku záhrady si označíme a, šírku b. Obsah záhrady vypočítame ako $S = ab$. Podľa zadania dostaneme, že má platiť:

$$30b = ab - 120,$$

$$40b = ab + 80.$$

Keď odpočítame prvú rovnicu od druhej, dostaneme, že platí:

$$10b = 200,$$

$$b = 20.$$

Dosadením do prvej rovnice dostaneme:

$$600 = 20a - 120,$$

$$720 = 20a,$$

$$a = 36.$$

Dĺžka záhrady je 36 metrov a šírka 20 metrov.

4. Neviem si spomenúť na Tomášovo číslo. Pamätám si len, že:

- Je šesťmiestne.
- Trojciferné číslo tvorené prvými troma ciframi (v takom poradí, ako sú v Tomášovom čísle) je štvrtinou trojciferného čísla tvoreného druhými troma ciframi z Tomášovho čísla (taktiež v poradí).
- Prostredné dve číslice sú rovnaké.
- Druhá číslica je dvojnásobok prvej.
- Tretia číslica je buď dvojnásobok prvej, alebo o 3 väčšia.

Viete zistiť Tomášovo číslo?

Riešenie: Prvá cifra Tomášovho čísla môže byť najviac 2, pretože 4-násobok trojciferného čísla začínajúceho cifrou 3 alebo väčšou je už 4-ciferné číslo. To by

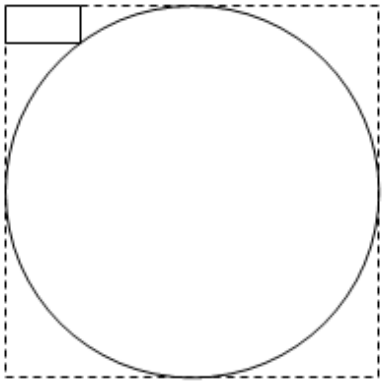
teda nemohlo tvoriť posledné tri cifry Tomášovho čísla. Prvá cifra je teda 1 alebo 2. Rozoberme obe možnosti.

Ak by prvá cifra bola 1, tak druhá cifra je dvojnásobok prvej cifry, teda 2, a tretia cifra je buď $1 \cdot 2 = 2$, alebo $1 + 3 = 4$. Ak by bola tretia cifra 2, tak posledné tri cifry Tomášovho čísla by boli $4 \cdot 122 = 488$. Dostali by sme šesťmiestne číslo 122 488. Lenže toto číslo nevyhovuje všetkým podmienkam, lebo prostredné dve cifry nie sú rovnaké. Ak by tretia cifra bola 4, tak posledné tri cifry by boli $4 \cdot 124 = 496$. Šesťmiestne číslo 124 496 má prostredné dve cifry rovnaké a teda vyhovuje všetkým podmienkam, čo ľahko overíme aj skúškou.

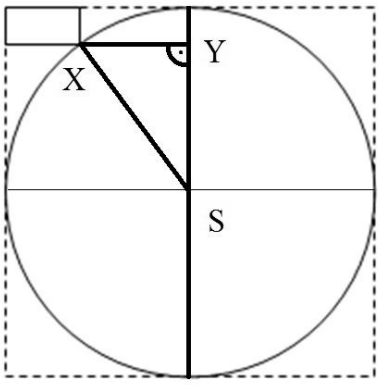
Rozoberme teraz druhú možnosť – ak bola prvá cifra Tomášovho čísla 2. V takom prípade štvornásobok prvého trojčíslia musí začínať na 8 alebo 9. Lenže tretia číslica je buď $2 \cdot 2 = 4$ alebo $2 + 3 = 5$. Tým pádom prostredné dve cifry nemôžu byť rovnaké, a teda Tomášovo číslo určite nemôže začínať cifrou 2.

Úloha má jediné riešenie – Tomášovo číslo je 124 496.

5. Ornament pečate je znázornený na obrázku. Vypočítajte polomer kruhu za predpokladu, že malý obdĺžnik vľavo hore má rozmery 1 cm x 2 cm.



Riešenie: Označme hraničnú kružnicu kruhu ako *k*, jej polomer *r* a stred *S*. Bod *X* nech je bodom dotyku malého obdĺžnika a kružnice. Bod *Y* nech je päta kolmice z bodu *X* na spojnicu stredu hornej strany štvorca a bodu *S*.



Keďže bod *X* patrí kružnici *k*, platí $|SX| = r$. Dolná strana malého obdĺžnika je rovnobežná s hornou stranou štvorca a úsečka *XY* tiež. Preto bude úsečka *XY*

predĺžením dolnej strany malého obdĺžnika a vzdialenosť bodu Y od hornej strany obdĺžnika bude 1. Potom musí platiť $|SY| = r - 1$. Keďže dĺžka dolnej strany malého obdĺžnika je 2 a polomer kružnice k je r, musí platiť aj $|XY| = r - 2$.

Z Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník SXY postupne dostaneme, že platí:

$$|XY|^2 + |SY|^2 = |SX|^2,$$
$$(r-2)^2 + (r-1)^2 = r^2,$$
$$r^2 - 4r + 4 + r^2 - 2r + 1 = r^2,$$
$$r^2 - 6r + 5 = 0,$$
$$(r-1)(r-5) = 0.$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu s neznámou r, ktorá má korene 1 a 5. Riešenie $r = 1$ ale nevyhovuje, lebo potom by $|XY| = r - 2 = 1 - 2 = -1$ bolo záporné číslo, čo nie je možné, keďže ide o dĺžku úsečky. Preto má kruh polomer 5 cm.

6. Dominik pozoroval sedačkovú lanovku na vrcholku magickej hory. Vyhliadol si jednu sedačku a chcel zistiť, za ako dlho urobí celý okruh, teda zo spodnej stanice späť do spodnej stanice. Keď bola jeho sedačka v spodnej stanici, zapol stopky. Spočiatku spodnou stanicou prechádzala každých 8 sekúnd jedna sedačka. No po 3 minútach a 28 sekundách lanovku pustili rýchlejšie a teraz spodnou stanicou prechádzali sedačky každých 5 sekúnd. Keď sa Dominikova sedačka vrátila do spodnej stanice, vypol stopky. Ukazovali 11 minút a 13 sekúnd. Koľko sedačiek mala lanovka?

Riešenie: V čase, keď boli spustené stopky (t. j. v čase 0 sekúnd od začiatku), prechádzala spodnou stanicou prvá sedačka. Najprv prechádzali sedačky spodnou stanicou každých 8 sekúnd, takže v čase 8 sekúnd od začiatku prechádzala druhá sedačka, v čase $16\,\text{s} = 2 \cdot 8\,\text{s}$ tretia sedačka atď. V čase $k \cdot 8$ sekúnd prechádzala spodnou stanicou $(k+1)$. sedačka. 3 minúty a 28 sekúnd je $3 \cdot 60 + 28 = 208 = 26 \cdot 8$ sekúnd. Takže v čase 3 minúty a 28 sekúnd od začiatku prechádzala spodnou stanicou 27. sedačka.

Potom prechádzali sedačky spodnou stanicou každých 5 sekúnd. V čase $208 + 5 = 213$ sekúnd išla 28. sedačka, v čase $208 + 2 \cdot 5 = 218$ sekúnd 29. sedačka atď. V čase $208 + k \cdot 5$ sekúnd od začiatku prechádzala spodnou stanicou $(27 + k)$. sedačka. Potrebujeme zistiť, koľká sedačka prechádzala spodnou stanicou v čase vypnutia stopiek, teda 11 minút a 13 sekúnd od začiatku. 11 minút a 13 sekúnd je $11 \cdot 60 + 13 = 673$ sekúnd. Keďže platí

$$673 = 208 + 465 = 208 + 93 \cdot 5,$$

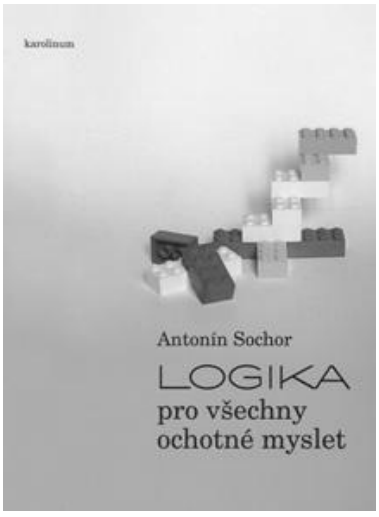
v čase vypnutia stopiek prechádzala spodnou stanicou $27+93=120.$ sedačka. Lenže to už bola prvá Dominikova sedačka, ktorá sa práve vrátila. Teda lanovka mala 119 sedačiek.

Výsledková listina po 2. sérii korešpondenčnej súťaže

Por.	Priezvisko	Meno	Kategória	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	Spolu
1	Doboš	Norbert	C	G Š. Moysesa Moldava nad Bodvou	18			5	3	5	5	36
1	Harajda	Gabriel	C	G Š. Moysesa Moldava nad Bodvou	17			5	4	5	5	36
1	Šmelko	Adam	C	G Š. Moysesa Moldava nad Bodvou	18			5	4	4	5	36
4	Jenis	Sebastián	Z	G Š. Moysesa Moldava nad Bodvou	17	4	5	3	2	0		31
5	Bujdáková	Kristína	B	OA Šurany	13					5	4	22
6	Zahumenský	Adam	B	Piaristické gymnázium J. Braneckého Trenčín	18							18
7	Bahíková	Angelika	B	OA Šurany	8					4	3	15
8	Dlugošová	Michaela	Z	ZŠ s MŠ Poprad, Francisiho 832/21	11							11
9	Hlinka	Filip	B	OA Šurany	0					5	5	10
10	Babínová	Silvia	B	OA Šurany	5							5
11	Pastirčák	R.	Z	G Š. Moysesa Moldava nad Bodvou	0							0

Ak pravdivo povieš, že klameš, klameš?

(Zamyslenie nad knihou Sochor, A.: Logika pro všechny ochotné myslet. Praha, Univerzita Karlova, 2011.)



Priznám sa hneď a bez mučenia, že som sa na túto publikáciu tešil dva až tri roky. Už dlhšiu dobu som presvedčený, že nielen v našich školách potrebujeme uplatňovať viac elementárnej logiky. Často dochádza v spoločnosti až k banálnym sporom len preto, že účastníci nevedia o základných pravidlách pre správne usudzovanie (odvodenie dôsledkov). Významný český matematik **Antonín Sochor** (1942 – 2008) sa pokúsil predviesť čitateľovi, že *pri skúmaní správneho usudzovania – teda pri vyšetrovaní podstatnej oblasti ľudského rozumu – dosahuje matematická logika hlboké poznanie.* Obsahom knižky je precízny a trpezlivý výklad výrokového počtu, predikátového počtu a dokazovateľnosti i nedokazovateľnosti v matematických teóriách. Publikácia obsahuje aj veľa užitočných logických cvičení, hádaniek i hlavolamov aj s naznačením ich správneho riešenia. Motivačne sympatický je aj výklad o historických koreňoch logiky. *Človek je zjavne stvorený pre to, aby myslel.*

V tom spočíva celá jeho dôstojnosť i celá jeho prednosť; jeho zásadnou povinnosťou je, aby myslel správne. (B. Pascal, 1623 – 1662)

Čítanie publikácie nepredpokladá žiadne základné poznatky z logiky, stačí ochota premýšľať a sledovať argumentáciu. Výrokový počet ukazuje pravidlá tzv. prirodzenej dedukcie, logické operácie s výrokmi aj metódy pre dokazovanie formúl výrokového počtu. V druhej kapitole je uvedený algoritmus na riešenie sylogizmov. Problematika pravdivosti aj dokazovania v predikátovom počte je vysvetlená moderným symbolickým vyjadrením na mnohých príkladoch. Dokazovanie v axiomatickej teórii spolu s naznačenými princípmi vedúcimi ku Gödelovým vetám o neúplnosti aritmetiky sú „zlatým klincom" ponúkaného matematického sveta.



Autor (na fotografii) spomínanej publikácie zaujímavo ocenil Gödelove vety o neúplnosti aritmetiky svojím presvedčením: *Vyvolávajú súčasne hrdosť aj pokoru – hrdosť nad tým, ako ďaleko môže zájsť ľudské poznanie – až tak ďaleko, že dokáže spoznať svoje medze – a poznanie medzí by zase malo byť zdrojom pokory.* Ako učiteľovi školskej matematiky mi bude príjemnou povinnosťou presviedčať ľudí vo svojom okolí, že logika v podaní tejto knižky je užitočným myšlienkovým zážitkom pre spresnenie postupov v našich úsudkoch, odôvodneniach i dôkazoch.

Dušan Jedinák

Číselné úlohy pre rok 2012



Ponúkame vám jednoduché alebo aj mierne podnetné úlohy, v ktorých hrá zaujímavú úlohu číslo 2 012.

1. Stanovte počet prirodzených čísiel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2 012.

2. Stanovte, koľko prvočísiel menších než 2 012 má ciferný súčet dva.

3. V desiatkovej číselnej sústave stanovte ciferný súčet čísla $10^{2\,012} + 2\,012$.

4. Stanovte poslednú cifru čísla $2\,012^{2\,012} - 12$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.

5. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je 2 012.

6. Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 123456789101112131415 ... 997998999. Stanovte, aká číslica je na 2 012. mieste od začiatku.

7. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2010}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2011}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2012}\right).$$

8. Stanovte zvyšok po delení čísla 10^{2012} číslom 15.

9. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla $5^{-2\,012}$.

10. Stanovte poslednú číslicu čísla $3^{2\,010} \cdot 7^{2\,011} \cdot 13^{2\,012}$.

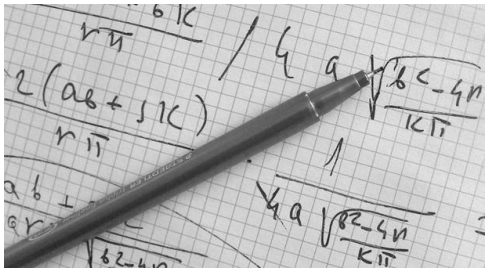
11. Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z 2 012 deviatok (999 ... 999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

12. Encyklopédia má očíslovaných 2 012 strán (prirodzené čísla od 1 do 2 012 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 2.

13. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než $10^{2\,012}$ má ciferný súčet 2.

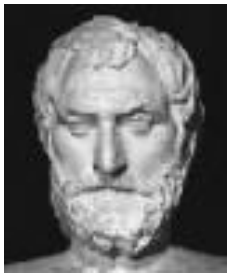
14. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 10 = 2\,012$.

15. Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2 012 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.



Čriepky z histórie matematickej kultúry

Medzi prvými s označením *matematik*



Od 6. stor. pred n. l. v antickom Grécku, na pobreží Malej Ázie a východného Stredomoria, prekvitali obchodné mestá, administratívne centrá i strediská starovekej kultúry. Ak poznávame dejiny, možno treba označiť aj tých, ktorí významne prispeli už v začiatkoch k rozvoju matematického myslenia. Niektorých poznáme po mene a z nich sme vybrali aj prvých matematikov (všetky spomínané roky patria do obdobia pred naším letopočtom): **Táles z Milétu** (asi 624 – 547), grécky filozof, zhrnul egyptské matematické poznatky, pracoval s podobnosťou trojuholníkov, vedel, že všetky obvodové uhly nad priemerom kružnice sú pravé. **Anaximandros** (asi 610 – 546) vytvoril pojem nekonečna ako niečoho neohraničeného a nevyčerpateľného, zostrojil prvú mapu sveta, zdokonalil slnečné hodiny. **Pytagoras zo Samu** (asi 570 – 500) predpokladal harmonickú stavbu sveta charakterizovanú číslami. Jeho kult a mysticizmus prirodzených čísiel bol narušený objavom nesúerateľnosti uhlopriečky štvorca s jeho stranou. Možno poznal všeobecný dôkaz vety o obsahu štvorcov nad stranami pravouhlého trojuholníka. Medzi významných pytagorovcov, ktorí sa zapísali do dejín matematiky, patrili aj **Filolaos z Krotonu** a **Hippasos z Metapontu**. **Hippokrates z Chia** (okolo 440) skúmal plochy



rovinných útvarov ohraničených kruhovými oblúkmi, pochopil úlohu logickej dedukcie pri usporiadaní znalostí rovinnej geometrie. **Hipias z Elidy** (okolo 420) vytvoril krivku, pomocou ktorej vedel rozdeliť ľubovoľný uhol na tri časti. **Zenón z Eley** (asi 490 – 430), kritický mysliteľ, zdôraznil úlohu rozumu v poznaní sveta. Ponúkal paradoxy (45) spojené s predstavou nekonečna, spojitosťou a pohybom. **Eudoxos z Knidu** (asi 408 – 355) pracoval v platónskej Akadémii, vytvoril teóriu proporcií a rozpracoval exhaustačnú metódu. **Theaitetos z Atén** (asi 414 – 369) rozpracoval teóriu a klasifikáciu iracionálnych veličín, skúmal pravidelné mnohosteny. **Archytas z Tarentu** (asi 428 – 365) prispel k štúdiu figurálnych čísiel ako spojenia medzi aritmetikou a geometriou, podal neklasické riešenie úlohy o zdvojení kocky. Medzi príslušníkmi aténskej školy boli aj ďalší úspešní v matematických disciplínach: **Platón** (428 – 347) poznal pravidlo pre získanie pytagorovských trojíc čísiel v tvare $4p^2-1,\ 4p,\ 4p^2+1$. **Theodoros z Kyreny** (4. stor.) dokázal iracionalitu druhých odmocnín čísel, ktoré nie sú štvorcové, **Aristoteles zo Stageiry** (374 – 322) položil základy formálnej logiky (definície pojmov, úsudky, dokazovanie), **Menaichmos** (4. stor.) spoznal vlastnosti kužeľosečiek a využil ich na riešenie problému zdvojenia kocky, **Eudemos z Rodosu** napísal v druhej polovici 4. stor. pred n. l. asi prvé dejiny matematiky.

V Alexandrii bolo okolo roku 335 pred n. l. založené prvé bádateľské stredisko *Múzeión* s obrovskou knižnicou papyrusových zvitkov. Zlatá doba gréckej matematiky zanechala ľudstvu mená prvých milovníkov matematiky (toho, čo sa dá pochopiť a naučiť premýšľaním). Boli očarení možnou harmóniou sveta, ktorú chceli vyjadrovať v číslach. Prostredníctvom číselných vzťahov a pomerov úsečiek sa chceli dozvedieť nemennú pravdu. Začali vnímať a študovať ideálny svet matematických pojmov, silu postulátov a foriem dôkazov. Aj ich pričinením sa súčasťou matematiky postupne stávajú osvedčené zásady ľudského myslenia upravené do logického systému. **Euklides z Alexandrie** (asi 340 – 287) systematicky spojil staršie teoretické matematické výsledky a vytvoril z matematiky axiomaticky budovaný celok. **Archimedes zo Syrakúz** (asi 287 – 212) vytvoril nové metódy na výpočet obsahov a objemov, rozvíjal poznatky zo statiky aj mechaniky, vynachádzal užitočné stroje. **Eratostenes z Kyreny** (asi 276 – 194) pomocou geometrických úvah určil rozmery Zeme, našiel jednoduchý postup na určovanie prvočísiel. **Apollonios z Pergy** (asi 260 – 170) rozpracoval teóriu kužeľosečiek, na geometrické konštrukcie používal výslovne len kružidlo a pravítko. **Hipparchos z Nikaie** (asi 180 – 125) určil z geometrických úvah polomer Mesiaca a vzdialenosť Zem – Mesiac, zaviedol základné prvky trigonometrie.





Dušan Jedinák

Číselné úlohy pre rok 2012 – správne odpovede:

1. Počet hľadaných čísel je 100.
2. Sú len tri také prvočísla (2; 11; 101).
3. Ciferný súčet je 6.
4. Posledná cifra je 4.
5. Prvá číslica je 5.
6. Na 2 012. mieste od začiatku je číslica 0.
7. Hodnota výrazu je 1 006,5.
8. Zvyšok po delení je 10.
9. Posledná cifra je 6.
10. Posledná číslica je 7.
11. Deviatok je tam 2 011.
12. Číslica 2 sa tam vyskytuje 615-krát.
13. Požadovaných čísel je 2 025 078.
14. Rôznych štvoríc je 7 (použi $2\,002 = 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$).
15. Čísel označených práve dvomi značkami je 504.

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Alan Turing 1
Dušan Jedinák: Carl Friedrich Weizsäcker 2
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2011/2012 3
Riešenia úloh 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 3
Výsledková listina po 2. sérii korešpondenčnej súťaže 9
Dušan Jedinák: Ak pravdivo povieš, že klameš, klameš? 9
Dušan Jedinák: Číselné úlohy pre rok 2012 10
Dušan Jedinák: Čriepky z histórie matematickej kultúry 12
Číselné úlohy pre rok 2012 – správne odpovede ..... 3. strana obálky
Obsah ..... 4. strana obálky

MATMIX – matematický časopis pre žiakov a učiteľov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák a Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov a učiteľov so záujmom o matematiku.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Škrovinová
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Adresa redakcie: P-MAT, n. o., Ing. Mgr. Martin Hriňák – MATMIX, P. O. BOX 2, 814 99 Bratislava 1
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854
Náklad: 100 ks

