Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

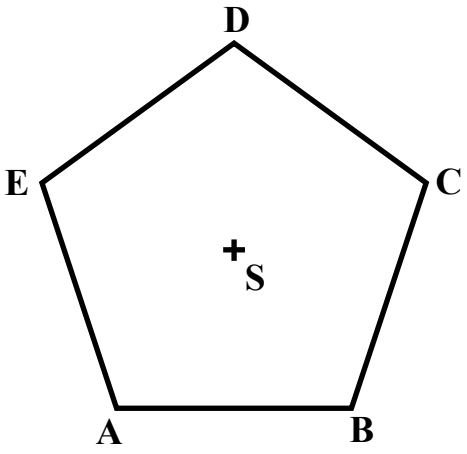
1. Máme tri škatule. Na každej je nápis, či v nej sú dve čierne guľôčky, dve biele alebo po jednej z oboch farieb. Nápisy sú však poprehadzované tak, že ani jeden z nich nie je pravdivý. Vašou úlohou je len na základe výberu jednej guľôčky z jednej škatule určiť, v ktorej škatuli sú aké guľôčky.

Riešenie: Vyberme jednu guľôčku zo škatule, na ktorej je napísané, že obsahuje jednu bielu a jednu čiernu guľôčku. Ak je biela, tak v danej škatuli sú dve biele guľôčky, pretože bielu guľôčku s čiernou nemôže obsahovať, pretože je na nej uvedené, že obsahuje bielu a čiernu. A zo zrejmých dôvodov tam nemôžu byť ani dve čierne. Ostali nám dve škatuľky s nápismi dve čierne a dve biele guľôčky. Dve čierne guľôčky nemôžu byť v škatuli, ktorá má nápis dve čierne guľôčky, preto musia byť v škatuli s nápisom dve biele guľôčky. Potom v škatuli s nápisom dve biele guľôčky bude jedna biela a jedna čierna guľôčka.

Analogicky postupujeme aj v prípade, keď zo škatuľky s nápisom jedna biela a jedna čierna guľôčka vytiahneme čiernu guľôčku: v tejto škatuľke budú dve čierne guľôčky, v škatuľke s nápisom dve čierne guľôčky budú dve biele guľôčky a v škatuľke s nápisom dve biele guľôčky bude jedna biela a jedna čierna guľôčka.

2. Usporiadajte na stole šesť mincí tak, aby stredy ľubovoľných troch z nich tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

Riešenie: Ukážeme si, že vyhovujúcim riešením je päť vrcholov pravidelného päťuholníka *A*, *B*, *C*, *D*, *E* a jeho stred *S* (stred kružnice opísanej tomuto päťuholníku). Ak si zvolíme v rámci trojice bodov stred *S*, tak trojuholník bude rovnoramenný vzhľadom na to, že bod *S* je rovnako vzdialený od všetkých piatich vrcholov pravidelného päťuholníka. Ak v rámci trojice nezvolíme bod *S*, všetky tri vrcholy tohto trojuholníka budú tvorené vrcholmi



pravidelného päťuholníka. Keďže ich je päť, aspoň dva z nich budú susedné (ak by to tak nebolo, tak medzi každými dvoma vrcholmi trojuholníka by musel byť aspoň jeden ďalší vrchol pravidelného päťuholníka. To by však viedlo k tomu, že by pravidelný päťuholník mal aspoň 3 + 3 = 6 vrcholov, čo nie je možné.

Bez ujmy na všeobecnosti preto môžeme predpokladať, že dva vrcholy trojuholníka sú *A* a *B*. Potom ostávajú tri možnosti pre tretí vrchol: *C, D, E.* V trojuholníku *ABC* platí $|AB| = |BC|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. V trojuholníku *ABD* platí $|AD| = |BD|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. V trojuholníku *ABE* platí $|AE| = |AB|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. Tým sme ukázali, že všetky trojuholníky tvorené ľubovoľnou trojicou z týchto šiestich bodov sú rovnoramenné.

3. Do výrazu $20:5\cdot 2+6^2$ doplňte zátvorky tak, aby ste dostali nasledujúci výsledok:

a) 38,

b) 152,

c) 256.

Riešenie: Možné riešenia jednotlivých úloh sú tieto:

a) $38 = 20:(5\cdot 2)+6^2$,

b) $152 = (20:5)\cdot(2+6^2)$,

c) $256 = (20:5)\cdot(2+6)^2$.

4. Koľko je medzi prirodzenými číslami od 1 do 1 000 takých, ktoré nie sú deliteľné ani dvomi ani tromi?

Riešenie: Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné dvomi, sú 2, 4, ..., 1000. Je ich presne polovica z 1000, teda $1000:2=500$ (môžeme si ich totiž predstaviť aj ako 2.1, 2.2, ..., 2.500). Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné tromi, sú 3, 6, ..., 999. Je ich presne tretina z 999, teda $999:3=333$ (môžeme si ich opäť predstaviť aj ako 3.1, 3.2, ..., 3.333). To znamená, že nám ostáva $1000-500-333=167$ čísel.

Medzi vynechanými sú však aj také, ktoré sme vynechali dvakrát – raz ako číslo deliteľné dvomi, raz ako číslo deliteľné tromi. Keďže ich môžeme odrátať len raz, musíme ich pripočítať. Keďže číslo deliteľné dvoma aj troma je číslo deliteľné

šiestimi, musíme pripočítať ešte počet čísel od 1 do 1000, ktoré sú deliteľné šiestimi. Ide o čísla 6, 12, ..., 996. Analogicky ich je $996:6=166$.

Preto je celkový počet prirodzených čísel od 1 do 1 000, ktoré nie sú deliteľné ani dvomi ani tromi, $167+166=333$.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré platí $ab+a+b=2020$.

Riešenie: Úpravou rovnice dostávame ekvivalentnú rovnicu

$$(a+1)(b+1)=2021=43\cdot 47.$$

Keďže a, b sú prirodzené čísla a 43 a 47 prvočísla, môžu nastať len tieto možnosti:

- $a+1=1, b+1=2021$, čo vedie k riešeniu $a=0, b=2020$, to ale nevyhovuje, lebo 0 nie je prirodzené číslo.
- $a+1=43, b+1=47$, čo vedie k riešeniu $a=42, b=46$.
- $a+1=47, b+1=43$, čo vedie k riešeniu $a=46, b=42$.
- $a+1=2021, b+1=1$, čo vedie k riešeniu $a=2020, b=0$, to ale nevyhovuje, lebo 0 nie je prirodzené číslo.

Úloha má teda dve riešenia – usporiadané dvojice (42,46) a (46,42).

6. Určte počet všetkých riešení rovnice $y+3x=100$, kde x, y sú prirodzené čísla.

Riešenie: Z rovnice si vyjadríme neznámu y: $y=100-3x$. Keďže y aj x majú byť prirodzené čísla, x môže nadobúdať len hodnoty 1, 2, ..., 33, pretože pre $x\geq 34$ už vychádza hodnota y záporná. Zároveň vidíme, že pre každú uvedenú hodnotu dostávame práve jedno riešenie $[x, 100-3x]$. Rovnica $y+3x=100$, kde x, y sú prirodzené čísla, má preto 33 riešení.