Ročník: 18
Číslo: 3 – 4
Šk. rok: 2012/2013

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy, v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie ľudí.

Max von Laue

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

týmto tretím tohtoročným číslom ukončujeme 18. ročník vydávania časopisu MATMIX. Aká bude budúcnosť vydávania časopisu, uvidíme čoskoro – opäť sme požiadali o dotáciu Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky na vydávanie periodickej tlače. Od jej schválenia sa bude odvíjať aj cena predplatného v budúcom školskom roku.

V tomto čísle časopisu sa v rámci histórie matematiky venujeme Vojtechovi Jarníkovi, nezabudnuteľnému učiteľovi matematiky, uverejňujeme aj zamyslenie na tému Školská matematika ako podnetné uvažovanie, ale aj 15 zaujímavých úloh, ktoré spája rok 2013. Riešenia týchto úloh zverejníme v nasledujúcom čísle časopisu. Pre netrpezlivých riešiteľov je tu však možnosť overiť si ich aj na webovej stránke ich autora, Dušana Jedináka. Čriepky z histórie matematickej kultúry sa v tomto čísle venujú Diofantovi a Boethiusovi.

Prajem vám príjemné prežitie prázdnin a verím, že sa spolu opäť stretneme v septembri pri ďalšom čísle časopisu.

Martin Hriňák

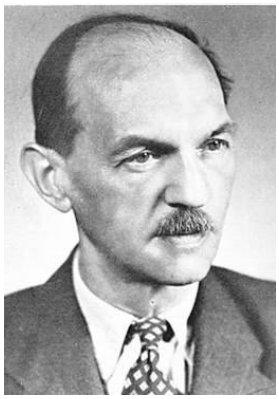
Vojtech Jarník – nezabudnuteľný učiteľ matematiky

V meste na Vltave

Praha bola mestom jeho detstva, štúdií, vedeckých úspechov a pedagogickej činnosti. **Vojtech Jarník** sa narodil 22. decembra 1897 v rodine profesora románskej filológie Karlovej univerzity. Po úspešnej maturite (1915) získal štúdiom na univerzite spôsobilosť vyučovať matematiku a fyziku. V rokoch 1919 – 1921 ako asistent J. Vojtěcha (1879 – 1953) učil na technike v Brne. Získal doktorát (1921) a nastúpil na prírodovedeckú fakultu Karlovej univerzity v Prahe ako asistent profesora K. Petra (1868 – 1950). Stal sa jeho výborným žiakom. Roky 1923 až 1925 a 1927/28 strávil na študijnom pobyte u známeho nemeckého matematika Edmunda Landaua (1877 – 1938) v Göttingene. Právo prednášať na vysokej škole získal v roku 1925. Tridsaťjedenročný Jarník bol menovaný mimoriadnym profesorom (1929) a neskôr (1935) riadnym. V rokoch 1927 – 1938 napísal 51 pôvodných vedeckých prác, napr. aj s W. Sierpińskim. Úspešnú učiteľskú činnosť rozvinul na Karlovej univerzite. Zastával veľa akademických funkcií, bol prodekanom i dekanom prírodovedeckej fakulty, prorektorom univerzity. Zomrel 22. septembra 1970 v Prahe.



Práca pre matematickú vedu



Svetové meno získal V. Jarník prácami z analytickej teórie čísel a teórie reálnych funkcií. Venoval sa hlavne teórii mrežových bodov vo viacrozmerných elipsoidoch, teórii diofantovských aproximácií, geometrii čísel. Dômyselne kombinoval klasické metódy s modernými metódami množinovej matematiky. Napísal okolo 90 originálnych vedeckých prác a monografií. Spolu s Eduardom Čechom položili základy obdobia svetového uznania československej matematiky. Pätnásť rokov viedol matematickú časť *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*, neskôr aj *Czechoslovak MathematicaI Journal*. Bol v redakčnej rade poľského časopisu *Acta Aritmetica*. Za výsledky svojej matematickej činnosti bol prijatý za riadneho člena Českej akadémie vied a umení (1946) a ČSAV (1952). Bol laureátom štátnej ceny (1952), dostal Rád práce (1958)

a Rád republiky (1967). Získal striebornú medailu ČSAV za zásluhy o vedu a ľudstvo i čestný doktorát honoris causa Karlovej univerzity (1968). Čestným členom JČSMF sa stal roku 1962.

Úspešný učiteľ



Učiteľskej činnosti sa akademik Vojtech Jarník, významný český matematik a láskavý vysokoškolský profesor, venoval s neobvyklým zaujatím. Vyžaroval hlbokým vzdelaním a ušľachtilým duchom. Jeho výklad bol jasný, prehľadný, veľmi pestrý, myšlienkovo a logicky vybudovaný do všetkých podrobností. Vedel dobre štylizovať, jeho prednášky boli dobre premyslené a vopred rozvrhnuté. Ako dobrý znalec moderných matematických disciplín vedel znamenite vystihnúť a rozlíšiť podstatné od nepodstatného. Rozpracoval prednášanú problematiku do podrobností so zmyslom pre celkové súvislosti. Teoretický výklad spájal s praktickým použitím a numerickým vyčíslením. Často prinášal neformálne predstavy o danej učebnej látke. Vedel vynaložiť nemálo námahy na to, aby jeho úvahy boli prehľadné, funkčne motivované. A to je pravé umenie učiteľa-matematika. K zvýšeniu úrovne vysokoškolského štúdia prispel Jarník učebnicami matematickej analýzy – *Úvod do diferenciálneho počtu* (1946), *Úvod do integrálneho počtu* (1948), *Diferenciálny počet* (1953), *Integrálny počet* (1955). Vynikajú plynulým slohom a živým elegantným spôsobom vyjadrovania. Spomínam na jeho slová: *Matematická prednáška má jednu charakteristickú vlastnosť. Správne a účelne urobený reťazec úsudkov vedie s úplnou spoľahlivosťou od predpokladov vety k jej tvrdeniu. Ale naopak, ak urobíme čo len jednu chybu alebo ak nenájdeme v niektorom mieste myšlienkového reťazca účelné pokračovanie, ktoré povedie k cieľu, zrúti sa celý dôkaz poučky či riešenia problému.*

Citlivá zodpovednosť



Mal vypestovanú vnútornú morálnu silu i osobnú disciplínu. Vedel byť taktný a veľmi trpezlivý. Jeho ozdobou bola rozvážnosť, vecnosť a zodpovednosť. Netúžil po funkciách, ale vedel byť uvedomelý pre občiansku povinnosť. Citlivý prístup a takt k ľuďom, rozhľadenosť v kultúre i vrelý vzťah k hudbe boli neodmysliteľnou súčasťou jeho osobnosti. Vojtech Jarník, sa stal učiteľom

matematiky, vedcom i človekom, na ktorého sa nezabúda. Akademik Štefan Schwarz (1914 – 1996), významný slovenský matematik, absolvent pražskej univerzity, ocenil rýdzi profil Vojtecha Jarníka: „*Vidím pred sebou človeka s hlbokým ľudským cítením, človeka čistého charakteru, s akým som sa v živote len málokedy stretol*.“

Dušan Jedinák

Školská matematika ako podnetné uvažovanie

Tradičné ponuky a skúsenosti

Zamyslime sa nad možnosťami, ktoré sa nám otvárajú štúdiom matematiky. Už z doterajšieho poznania školskej matematiky možno uznáte, že ste boli vedení k presnému mysleniu a pestovaniu stručného, výrazného a logického vyjadrovania. Spoznávali ste cestu od konkrétneho k abstraktnému, od jednotlivého a osobitého k všeobecnému i naopak. Museli ste sledovať používané argumenty i preverovať svoje subjektívne názory. Tým ste sa približovali k nestrannému objektivizmu, schopnosti priznať omyl, chápať problémy z rôznych hľadísk. Ak ste boli čo len trochu v školskej matematike úspešní, získali ste aj schopnosť účinnejšie odovzdávať svoje vedomosti, zručnosti i túžby do vedomia iných ľudí. Spoznali ste nevyhnutnosť ľudskej spolupráce. Stali ste sa viac a pre iných hodnotnými ľuďmi.

Ak aj študent chápe študovaný predmet ako príležitosť pre rozvoj svojho ľudského intelektu a prehĺbenie myšlienkovej kultúry, môže aj hlbšie a zmysluplnejšie intelektuálne rásť. Matematické pojmy a postupy, štrukturálne vedomosti i výpočtové zručnosti, spôsob argumentácie a dokazovania, môžu prispievať k organizovanému systému základných poznatkov vhodných pre každý odbor ľudskej činnosti. Štúdium matematiky sa ponúka ako históriou osvedčený prirodzený postup rozumového modelovania pestrej reálnej skutočnosti, ktorú odráža myšlienková aktivita ľudských bytostí.

Zušľachťovanie rozumom

Už od Aristotela (384 – 322 pred n. l.) vieme (a denne sa o tom máme možnosť presvedčiť), že človek je pozoruhodný svojou schopnosťou premýšľať a domýšľať súvislosti (asociovať a idealizovať, odhaľovať súvislosti a kvantifikovať ich, abstrahovať i zovšeobecňovať, študovať vzory a vytvárať modely). Francúzsky filozof a prírodovedec Blaise Pascal (1623 – 1662), známy znalec rozporuplnosti ľudskej

povahy, ponúkal presvedčenie, že ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. *Človek je zrejme stvorený na to, aby myslel. V tom je celá jeho dôstojnosť i prednosť; jeho povinnosťou je, aby myslel správne*. Základným znakom myslenia je dôsledné, usporiadané, presné a všestranné hodnotiace uvažovanie i logické odvodzovanie. Tam, kde nastupuje zdôvodnené usudzovanie, abstraktné usporiadanie a príčinnosť faktov, tam sa vkráda matematika ako univerzálny prostriedok každej vedy, ako nástroj poznávania obrazu skutočnosti. Nikde ľudské myslenie nevystupuje s takou jasnosťou ako v matematike, ktorá sa zaoberá najvšeobecnejšími vecami, vie abstrahovať a pracovať s ideálnymi predstavami. Matematická kultúra ukázala, že najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými môžeme preverovať svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch.

Rozumová činnosť nám ponúka pochopenie i porozumenie vo vyšších syntézach než je len vnímanie, pamäť alebo obrazotvornosť. Vývoj ľudskej civilizácie je presvedčivým a mnohostranným dôkazom úspešnosti toho, čo nazývame zušľachtenie myslenia. Matematický spôsob uvažovania a argumentácie, s využitím abstrakcie a zovšeobecňovania, umožnil nečakaný rozvoj uplatnenia štrukturálnych súvislostí i vzťahovej príčinnosti. Kombinácia matematiky, predstavivosti a experimentu sa stala najmocnejším nástrojom ľudstva pri prenikaní do tajomstiev prírody i ľudskej myšlienkovej aktivity.

Matematická kultúra

Celá doterajšia civilizácia ľudstva naznačuje, že medzi prírodou a človekom je vzťah poznávania, ktorý môžeme charakterizovať ako medzisvet rozumu. V ňom má nezastupiteľnú úlohu matematická argumentácia ako symbolický univerzálny jazyk umožňujúci opis rôzneho obsahu, vyjadrujúci presné a jasné myslenie smerujúce k riešeniu najrozličnejších problémov. Matematické poznávanie sa stáva umením vnímať a prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach. Správne myslieť znamená aj lepšie pochopiť, úplne argumentovať, presvedčivo dokazovať. Matematika ako škola úsudkov, dôkazov a logickej presvedčivosti prispieva k rozvoju pozorovacích schopností, pamäti, predstavivosti, vnímavosti aj pre nematematické súvislosti. Veľmi presne to vyjadril poľský matematik a logik A. Tarski (1901 – 1983): *Tým, že matematika spresňuje a zjednocuje významy pojmov vo svojej oblasti, a že zdôrazňuje nevyhnutnosť takéhoto spresňovania a zjednocovania v každom inom odbore, vedie k možnosti lepšieho porozumenia medzi tými, ktorí*

majú snahu ho dosiahnuť. Na druhej strane tým, že zdokonaľuje a zjemňuje nástroje myslenia, robí ľudí kritickejšími a zmenšuje pravdepodobnosť toho, že budú zvedení všetkými možnými pseudoúvahami, ktorými sú dnes vystavení v rôznych oblastiach sveta.

Asi ťažko možno popierať, že sa pri štúdiu matematiky vytvárajú, rozvíjajú a upevňujú kladné charakterové, vôľové a morálne vlastnosti: svedomitosť, presnosť, korektnosť, sústavnosť, dôkladnosť, sebakritickosť, zodpovednosť, iniciatívnosť, vytrvalosť, húževnatosť. Matematické postupy sa neznášajú s povrchnosťou a nesystematickosťou. Krása logickej výstavby, hlboká nadväznosť a prehľadnosť postupov zanecháva štúdiom matematických disciplín hlboké estetické zážitky. Tak sa dostaneme až do oblasti citu i krásy. To sú hodnoty humanitné, ktoré prehlbujú ľudskú ušľachtilosť.

Prečo študovať matematiku?

Odhaľovanie súvislostí a objavovanie zákonitostí je možno jednou z najhlbších ľudských radostí. Spoznávanie neznámeho je prejavom veľkosti a dôstojnosti intelektu ľudskej bytosti. Pomocou matematických úvah sme dospeli k tomu, že v nami spoznávanom svete existujú príčinné vzťahy a organizované štruktúry s platnými zákonmi. Ak chápeme závislosti, ktoré zjednodušujú a vysvetľujú, môžeme uplatňovať nezvratnú matematiku. Kľúčom k axiomatizovaným systémom so štruktúrovanými pravidlami sú matematické disciplíny. Dlhodobým vývojom sa matematika stala organickou súčasťou vedeckého, technického a technologického sveta. Ukázalo sa, že matematický spôsob myslenia a argumentácie je nevyhnutný nielen vo vede a technike, ale pomáha aj v hudbe, archeológii, sociológii alebo športe. Matematika sa ukázala ako až neuveriteľne praktická v mnohých odboroch ľudskej činnosti. *Matematika je ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života* (J. B. Fourier, 1768 – 1830). Univerzálne myšlienkové postupy a idey nám cez matematické prístupy umožňujú dotýkať sa až nekonečna. *Matematika je veda o nekonečne. Jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov* (H. Weyl, 1885 – 1955). Koordinované matematické myslenie nám sprostredkúva vzťah medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom. Matematika nám pomáha pochopiť obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta.

Veľmi pôsobivo označil význam štúdia matematiky M. Laue (1879 – 1960), nositeľ Nobelovej ceny: *Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy, v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie ľudí*. Známy teoretický fyzik a nenapodobniteľný mysliteľ Albert Einstein (1879 – 1955) vnímal úlohu matematického úsilia takto: *Matematici sa namáhajú objaviť najuniverzálnejšie predstavy pre operácie, ktoré by dovoľovali jednoducho, logicky a do jedného systému uchopiť čo najširší okruh formálnych vzájomných vzťahov. Snažiac sa dosiahnuť ideovú a logickú vycibrenosť, odkryli formuly potrebné na hlbšie preniknutie do zákonov prírody... Som presvedčený, že čisto matematická konštrukcia umožní nájsť pojmy i tie zákonité vzťahy medzi nimi, ktoré vydajú kľúč pre porozumenie prírodných javov*. Vznešene chápal zmysel matematiky Norbert Wiener (1894 – 1964): *Najvyššie poslanie matematiky spočíva práve v tom, aby nachádzala skrytý poriadok v chaose, ktorý nás obklopuje*. Možno najpriliehavejšie vyjadril rozmer matematických úvah H. Weyl (1885 – 1955): *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta*.

Zmysluplné podnety

Ovplyvnenie ľudskej osobnosti matematickou kultúrou potrebuje zásah hlboký nielen v praktickej teórii, ale aj v oblasti duchovných predstáv o význame rozumu, ktorý vytvára modely, vníma a spracúva informácie do zmysluplných súvislostí matematických štruktúr. Matematická kultúra nám pomáha lepšie vnímať abstraktné pojmy, ktoré nám umožňujú pochopiť vzťahy zo sveta, v ktorom žijeme.

Je pravdou, že v praktickom a spoločenskom živote skoro nič nie je také logické, zdôvodniteľné a vypočítateľné ako v matematike. Dokonca Kurt Gödel (1906 – 1978), úspešný logik a matematik, otriasol základmi matematiky odhalením, že v každom dostatočne rozvinutom formálnom systéme existujú obsahovo zrozumiteľné vety, ktoré sú v rámci danej sústavy formálne nedokázateľné. Ani matematické snahy nemožno zbaviť omylov alebo sporov, ani moderná matematika neobsiahne celú, všetko obsahujúcu, pravdu. Matematické poznanie je tvorivý otvorený nezavŕšiteľný proces. Tým ponúka aj pokoru pred zmysluplným Tajomstvom a naznačuje ďalšie tvorivé hodnoty ľudskej myšlienkovej činnosti.

Korene zo školských lavíc

Možno aj z tu uvedených náznakov je vidieť, že vedecká matematika (i školská matematika) môže byť príležitosťou pre rozvoj teoretického i praktického ľudského intelektu, pre prehĺbenie všeobecnej kultúry, pre použitie v celom civilizačnom úsilí. Štúdium matematiky možno ponúkať ako dotyk s ideálnom a nekonečnom, ako vnímavosť pre objekty nadčasové, stále a nemenné, ako svet otvorený pre slobodnú neohraničenú duchovnú konštruktívnu tvorbu, ako životodarný prameň pre pravdu skrytú v prírode, ako prejav zušľachťujúcej harmónie sveta, v ktorom myslením vytvárame zmysluplné efektívne modely. Vzdelávanie už aj cez školskú matematiku môže byť príspevkom k rozvíjaniu osobnosti každého duchom obdareného človeka. Radosť z pochopenia súvislostí odhalených matematickým myslením v nás prebúdza nadšenie aj naďalej uplatňovať všetky osvedčené ľudské duchovno-rozumové schopnosti pri odhaľovaní zákonov nášho bytia.

Dušan Jedinák

Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

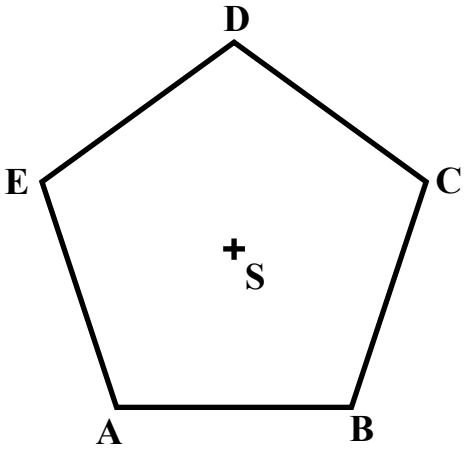
1. Máme tri škatule. Na každej je nápis, či v nej sú dve čierne guľôčky, dve biele alebo po jednej z oboch farieb. Nápisy sú však poprehadzované tak, že ani jeden z nich nie je pravdivý. Vašou úlohou je len na základe výberu jednej guľôčky z jednej škatule určiť, v ktorej škatuli sú aké guľôčky.

Riešenie: Vyberme jednu guľôčku zo škatule, na ktorej je napísané, že obsahuje jednu bielu a jednu čiernu guľôčku. Ak je biela, tak v danej škatuli sú dve biele guľôčky, pretože bielu guľôčku s čiernou nemôže obsahovať, pretože je na nej uvedené, že obsahuje bielu a čiernu. A zo zrejmých dôvodov tam nemôžu byť ani dve čierne. Ostali nám dve škatuľky s nápismi dve čierne a dve biele guľôčky. Dve čierne guľôčky nemôžu byť v škatuli, ktorá má nápis dve čierne guľôčky, preto musia byť v škatuli s nápisom dve biele guľôčky. Potom v škatuli s nápisom dve biele guľôčky bude jedna biela a jedna čierna guľôčka.

Analogicky postupujeme aj v prípade, keď zo škatuľky s nápisom jedna biela a jedna čierna guľôčka vytiahneme čiernu guľôčku: v tejto škatuľke budú dve čierne guľôčky, v škatuľke s nápisom dve čierne guľôčky budú dve biele guľôčky a v škatuľke s nápisom dve biele guľôčky bude jedna biela a jedna čierna guľôčka.

2. Usporiadajte na stole šesť mincí tak, aby stredy ľubovoľných troch z nich tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

Riešenie: Ukážeme si, že vyhovujúcim riešením je päť vrcholov pravidelného päťuholníka *A*, *B, C*, *D*, *E* a jeho stred *S* (stred kružnice opísanej tomuto päťuholníku). Ak si zvolíme v rámci trojice bodov stred *S*, tak trojuholník bude rovnoramenný vzhľadom na to, že bod *S* je rovnako vzdialený od všetkých piatich vrcholov pravidelného päťuholníka. Ak v rámci trojice nezvolíme bod *S*, všetky tri vrcholy tohto trojuholníka budú tvorené vrcholmi pravidelného päťuholníka. Keďže ich je päť, aspoň dva z nich budú susedné (ak by to tak nebolo, tak medzi každými dvoma vrcholmi trojuholníka by musel byť aspoň jeden ďalší vrchol pravidelného päťuholníka. To by však viedlo k tomu, že by pravidelný päťuholník mal aspoň 3 + 3 = 6 vrcholov, čo nie je možné.



Bez ujmy na všeobecnosti preto môžeme predpokladať, že dva vrcholy trojuholníka sú *A* a *B*. Potom ostávajú tri možnosti pre tretí vrchol: *C, D, E.* V trojuholníku *ABC* platí $|AB| = |BC|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. V trojuholníku *ABD* platí $|AD| = |BD|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. V trojuholníku *ABE* platí $|AE| = |AB|$, a teda tento trojuholník je rovnoramenný. Tým sme ukázali, že všetky trojuholníky tvorené ľubovoľnou trojicou z týchto šiestich bodov sú rovnoramenné.

3. Do výrazu $20:5\cdot 2+6^2$ doplňte zátvorky tak, aby ste dostali nasledujúci výsledok:

a) 38,

b) 152,

c) 256.

Riešenie: Možné riešenia jednotlivých úloh sú tieto:

a) $38 = 20 : (5 \cdot 2) + 6^2$,

b) $152 = (20 : 5) \cdot (2 + 6^2)$,

c) $256 = (20 : 5) \cdot (2 + 6)^2$.

4. Koľko je medzi prirodzenými číslami od 1 do 1 000 takých, ktoré nie sú deliteľné ani dvomi ani tromi?

Riešenie: Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné dvomi, sú 2, 4, ..., 1000. Je ich presne polovica z 1000, teda $1000 : 2 = 500$ (môžeme si ich totiž predstaviť aj ako 2.1, 2.2, ..., 2.500). Prirodzené čísla, ktoré sú deliteľné tromi, sú 3, 6, ..., 999. Je ich presne tretina z 999, teda $999 : 3 = 333$ (môžeme si ich opäť predstaviť aj ako 3.1, 3.2, ..., 3.333). To znamená, že nám ostáva $1000 - 500 - 333 = 167$ čísel.

Medzi vynechanými sú však aj také, ktoré sme vynechali dvakrát – raz ako číslo deliteľné dvomi, raz ako číslo deliteľné tromi. Keďže ich môžeme odrátať len raz, musíme ich pripočítať. Keďže číslo deliteľné dvoma aj troma je číslo deliteľné šiestimi, musíme pripočítať ešte počet čísel od 1 do 1000, ktoré sú deliteľné šiestimi. Ide o čísla 6, 12, ..., 996. Analogicky ich je $996 : 6 = 166$.

Preto je celkový počet prirodzených čísel od 1 do 1 000, ktoré nie sú deliteľné ani dvomi ani tromi, $167 + 166 = 333$.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré platí $ab + a + b = 2020$.

Riešenie: Úpravou rovnice dostávame ekvivalentnú rovnicu

$$(a+1)(b+1) = 2021 = 43 \cdot 47.$$

Keďže a, b sú prirodzené čísla a 43 a 47 prvočísla, môžu nastať len tieto možnosti:

- $a + 1 = 1, b + 1 = 2021$, čo vedie k riešeniu $a = 0, b = 2020$, to ale nevyhovuje, lebo 0 nie je prirodzené číslo.
- $a + 1 = 43, b + 1 = 47$, čo vedie k riešeniu $a = 42, b = 46$.
- $a + 1 = 47, b + 1 = 43$, čo vedie k riešeniu $a = 46, b = 42$.

- $a+1=2021, b+1=1$, čo vedie k riešeniu $a=2020, b=0$, to ale nevyhovuje, lebo 0 nie je prirodzené číslo.
  Úloha má teda dve riešenia – usporiadané dvojice (42,46) a (46,42).

6. Určte počet všetkých riešení rovnice $y+3x=100$, kde x, y sú prirodzené čísla.

Riešenie: Z rovnice si vyjadríme neznámu y: $y=100-3x$. Keďže y aj x majú byť prirodzené čísla, x môže nadobúdať len hodnoty 1, 2, ..., 33, pretože pre $x \geq 34$ už vychádza hodnota y záporná. Zároveň vidíme, že pre každú uvedenú hodnotu dostávame práve jedno riešenie $[x, 100-3x]$. Rovnica $y+3x=100$, kde x, y sú prirodzené čísla, má preto 33 riešení.

Číselné úlohy pre rok 2013



Ponúkam jednoduché alebo aj mierne podnetné úlohy, v ktorých hrá zaujímavú úlohu číslo 2013.

1. Stanovte počet prirodzených čísiel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím 2013.

2. Stanovte, koľko prvočísiel menších než 2013 má ciferný súčet dve.

3. V desiatkovej číselnej sústave stanovte ciferný súčet čísla $10^{2013} + 2013$.

4. Stanovte poslednú cifru čísla $2013^{2013} - 13$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.

5. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je 2013.

6. Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 123456789101112131415...997998999. Stanovte, aká číslica je na 2013. mieste od začiatku.

7. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2012}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2013}\right).$$

8. Nájdite rôzne trojice prirodzených čísel $x<y<z$, ktoré sú riešením rovnice

$$x\cdot y\cdot z=2013.$$

9. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla 5^{-2013}.

10. Stanovte poslednú číslicu čísla $3^{2011}\cdot 7^{2012}\cdot 13^{2013}$.

11. Zápis čísla *K* v desiatkovej sústave sa skladá z 2013 deviatok (999...999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

12. Encyklopédia má očíslovaných 2013 strán (prirodzené čísla od 1 do 2013 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 3.

13. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než 10^{2013} má ciferný súčet 3.

14. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x<y<z<t$ je riešením rovnice

$$x\cdot y\cdot z\cdot t+11=2013.$$

15. Na tabuli sú napísané všetky čísla od 1 do 2013 (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Dušan Jedinák

Správne odpovede sú aj na webstránke www.era.topindex.sk
v časti Testy s matematickou tematikou (Číselné úlohy pre rok 2013)

Čriepky z histórie matematickej kultúry

Hĺbavý antický matematik



Hľa, tento náhrobok stojí nad pozostatkami Diofanta. Jeho vek udáva tento kameň a jeho diela. Zeus mu dal ako chlapcovi šestinu jeho života, potom za dvanástinu veku začala mu tvár zarastať. K tomu sedmina jeho veku a už mu fakle svadby žiarili. Päť rokov nato ho bohovia pekným synčekom obdarili. Nešťastné dieťa s takou vrúcnou láskou milované! Žiaľ, ni polovicu otcovho veku nedosiahlo, keď ťa Hades prijal. Štyri roky uspokojuje ešte otec bolesť umením čísel, keď konečne sám k cieľu svojho žitia prišiel. Tento veršovaný životopis sa nachádza v tzv. *Palatinskej antológii* z pera Metrodora v 6. storočí.

Životopisné údaje o Diofantovi sú veľmi skúpe. Vie sa, že žil za panovníka Juliána v Alexandrii okolo roku 250. Možno bol Babylončan a pochádzal z Mezopotámie. Zachovalo sa však šesť kníh, z 13 napísaných, pod názvom *Aritmetika*. Je to zbierka 189 rôznych vyriešených úloh. Zaujímavé na nich je to, že Diofantos tam neznámu veličinu označoval jedným symbolom a používal skrátené slová a znaky, ktoré zjednodušovali zápis matematických operácií (napr. zaviedol symbolické označenie aj pre druhú a tretiu odmocninu). Na čísla sa pozeral nezávisle od geometrickej predstavy a tým pripravoval cestu pre algebru, pre vytvorenie a zápis jednoduchých algoritmov. **Diofantos z Alexandrie** stručnejšie vyjadril potrebné vzťahy v slovno-geometrickom vyjadrovaní a odvážnymi užitočnými substitúciami vedel obratne jednotlivé prípady vyriešiť. Ako výsledky ho zaujímali iba kladné celé čísla a zlomky. Často mu stačilo, keď našiel iba jedno riešenie. Urobil veľký krok od geometrickej predstavy k symbolickej algebre, spoznal identitu

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(u^2+v^2\right)=\left(xu+yv\right)^2+\left(xv-zu\right)^2=\left(xu-yv\right)^2+\left(xv+zu\right)^2.$$

Vedel dokázať, že každý štvorec (druhú mocninu) možno „zložiť“ ako súčet dvoch štvorcov (dvoch druhých mocnín), dokonca nekonečne veľa spôsobmi. Ako to vyjadríme dnes?

Pre každé číslo a môžeme napísať $a^2=\left(\frac{2am}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{a\left(m^2-1\right)}{m^2+1}\right)^2$, kde m je ľubovoľné reálne číslo.

Pozrite si nápad, z ktorého to vychádza: Hľadajme $x \neq 0$, pre ktoré platí $a^2 = x^2 + \left(mx - a\right)^2$. Potom musí platiť aj:

$$a^2 = x^2 + m^2x^2 - 2amx + a^2 \;\Rightarrow\; x^2 + m^2x^2 - 2amx = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x + m^2x\right) = 2amx \;\Rightarrow\; x + m^2x = 2am \;\Rightarrow\; x = \frac{2am}{m^2+1}.$$

Potom $mx - a = \frac{2am^2}{m^2+1} - a = \frac{2am^2 - am^2 - a}{m^2+1}$, a teda $mx - a = \frac{a\left(m^2-1\right)}{m^2+1}$.

Diofantos z Alexandrie pripravil podnetné dielo gréckorímskeho staroveku, ktorým zboril ohraničenia medzi slovnou algebrou a geometriou a nastúpil cestu účinných symbolických zápisov. Úspešných pokračovateľov našiel až potom, keď vyšlo roku 1575 jeho dielo preložené do latinčiny. Diofantos bol prvým matematikom-priekopníkom algebraických zápisov, ktorý zrejme vytušil, že symbolické vzorce môžu za nás aj „*trochu myslieť*“.

Boethius – most medzi antikou a stredovekom



Narodil sa do doby politických a kultúrnych prevratov, do obdobia zániku antických zvykov a nástupu európskej kultúry. **Anicius Manlius Severinus Boethius** (asi 480 – 525) vedel po grécky rovnako dobre ako po latinsky. Zastával vysoké funkcie na dvore kráľa Teodoricha. Vykonával sprostredkovateľské poslanie i pedagogicko-výchovné pôsobenie. Nevytvoril pôvodný myšlienkový systém. Dôsledne preložil a pozorne vyložil zásadné antické texty Platónove i Aristotelove, filozofické aj logické otázky metafyziky a teológie. Napísal výklad k vzdelávacím odborom kvadrívia, (aritmetike, geometrii, astronómii a harmónii). Komentoval logické spisy o vyjadrovaní a vyhľadávaní dôkazov. *Všetko, čo poznávame, nie je chápané podľa svojej prirodzenosti, ale skôr podľa schopností poznávajúcich*. Boethius ovplyvnil nadchádzajúcu epochu aj tým, že postrehol rozvíjajúce sa funkcie usudzujúceho a hodnotiaceho ľudského rozumu. *Nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike... Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti.*

Dušan Jedinák

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Dušan Jedinák: Vojtech Jarník – nezabudnuteľný učiteľ matematiky 1
Dušan Jedinák: Školská matematika ako podnetné uvažovanie 4
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2012/2013 7
Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže..... 7
Dušan Jedinák: Číselné úlohy pre rok 2013..... 10
Dušan Jedinák: Čriepky z histórie matematickej kultúry 12

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku. Na vydávaní časopisu sa odborne podieľa Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, a P-MAT, n. o.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Škrovinová
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO: 41857836
Adresa redakcie: MATMIX – Ing. Mgr. Martin Hriňák, Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Číslo 2013/1 – 2. Náklad: 150 ks.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854