Zadania úloh 3. série korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2006/2007

1. Rozdeľte štvorec 13×13 na 11 a 12 menších štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán.

2. Peter prešiel autom tretinu cesty, keď mu došiel benzín. Zvyšok cesty musel ísť pešo. Čas, za ktorý prešiel cestu, ktorú šiel pešo, bol dvadsaťkrát dlhší než čas, počas ktorého šiel autom. Koľkokrát rýchlejšie šiel Peter autom než pešo?

3. Na stole leží 11 kartičiek, na ktorých sú všetky prirodzené čísla od 1 do 11. Gustáv si vybral jednu kartičku a svojim kamarátom povedal, že ak by vynásobili počet kartičiek, na ktorých sú menšie čísla ako jeho číslo, počtom kartičiek, na ktorých sú čísla väčšie ako jeho číslo, dostali by rovnaký výsledok, ako keby mal číslo o 2 väčšie. Aké číslo bolo na Gustávovej kartičke?

4. Zistite, či sa dá pravidelný šesťuholník rozdeliť na 12 zhodných štvoruholníkov.

5. Nájdite najmenšiu hodnotu výrazu

$$|x - p| + |x - 15| + |x - p - 15|,$$

ak viete, že platí $p \le x \le 15$, $0 < p < 15$.

6. Dokážte, že ak máme zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

7. Daných je k čísel napísaných v riadku. Dokážte, že vždy sa dá nájsť niekoľko čísel idúcich za sebou, ktorých súčet je deliteľný číslom k.

8. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré vieme nájsť 15 rôznych prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ množiny $\{16,17,\ldots,n\}$ takých, že a_k je deliteľné číslom k pre $k = 1, 2, \ldots, 15$.

9. Členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ celých čísel spĺňajú rovnicu

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999.$$

Dokážte, že táto postupnosť obsahuje maximálne jeden štvorec (druhú mocninu celého čísla).

10. Určte všetky celočíselné riešenia rovnice

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

11. Určte všetky reálne čísla *x*, pre ktoré platí, že číslo

$$x^n + x^{-n}$$

je prirodzené pre všetky prirodzené čísla *n*.

12. Pre reálne čísla $x_1, x_2, \ldots$ platí

$$\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| \leq 1$$

pre všetky *m*, *n* prirodzené. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *m*, *n* platí

$$\left|\frac{x_m}{m} - \frac{x_n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

13. Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešením rovnice

$$m^{n+m} = n^{n-m}.$$

14. Nech *P* je bod vnútri trojuholníka *ABC*. Ukážte, že existujú jednoznačne určené body A_1 na priamke *AB* a A_2 na priamke *CA* také, že *P*, A_1, A_2 sú kolineárne a platí $|PA_1| = |PA_2|$. Podobne definujme body B_1, B_2, C_1, C_2 tak, že *P*, B_1, B_2 sú kolineárne, pričom B_1 leží na priamke *BC*, B_2 leží na priamke *AB* a platí $|PB_1| = |PB_2|$, a *P*, C_1, C_2 sú kolineárne, C_1 leží na priamke *CA*, C_2 leží na priamke *BC* a platí $|PC_1| = |PC_2|$. Nájdite všetky také body P, že trojuholníky AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 majú rovnaký obsah.

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 16. 4. 2007.

Riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29