Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2014/2015

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Obdĺžniková záhrada má dĺžku 100 m a šírku 20 m. Vypočítajte, o koľko metrov štvorcových sa zmenší jej úžitková plocha, ak sa ohradí okrasným plotom, ktorý má šírku 50 cm.

Riešenie: Obsah záhrady je

$$S = 100\ \text{m} \cdot 20\ \text{m} = 2\,000\ \text{m}^2.$$

Ak záhradu ohradíme zvnútra okrasným plotom so šírkou 50 cm na každej strane, zmenší sa každý rozmer záhrady o 1 meter a ostane nám k dispozícii plocha tvaru obdĺžnika s rozmermi 99 m a 19 m. Jej obsah je

$$S' = 99\ \text{m} \cdot 19\ \text{m} = 1\,881\ \text{m}^2.$$

Rozdiel týchto dvoch obsahov je

$$S - S' = 2\,000\ \text{m}^2 - 1\,881\ \text{m}^2 = 119\ \text{m}^2.$$

teda úžitková plocha záhrady sa zmenší o 119 metrov štvorcových.

2. Miško si pomyslel jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Zuzka hádala, potom povedala, že hľadané číslo:

a) je v prvom riadku,
b) nie je v druhom stĺpci,
c) je párne,
d) je väčšie ako 3.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

Miško jej potom povedal, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Miško myslel?

Riešenie: Postupne rozoberieme 4 možnosti podľa toho, ktoré tvrdenie je pravdivé.

Ak by bolo pravdivé prvé tvrdenie, potom zvyšné tri sú nepravdivé, teda číslo musí byť v prvom riadku (môžu to byť čísla 1, 2, 3). Keďže musí byť v druhom stĺpci, musí to byť číslo 2. Potom je ale pravdivé aj tvrdenie c, pretože 2 je párne číslo. Ale to nemôže nastať, pretože pravdivé tvrdenie môže byť len jedno. Preto táto možnosť nevedie k riešeniu a prvé tvrdenie musí byť nepravdivé, a teda hľadané číslo nie je v prvom riadku.

Predpokladajme, že je pravdivé druhé tvrdenie, teda číslo sa nenachádza v druhom stĺpci. Keďže hľadané číslo nie je ani v prvom riadku, prichádzajú do úvahy len čísla 9, 6, 7 a 8. Všetky štyri sú však väčšie ako 3, teda je pravdivé aj posledné tvrdenie. To však má byť nepravdivé, a preto ani táto možnosť nevedie

k riešeniu. Preto musí byť aj druhé tvrdenie nepravdivé, teda hľadané číslo je v druhom stĺpci. Keďže nie je v prvom riadku, ostali nám už len dve možnosti: 5 a 4.

Ak by bolo pravdivé tretie tvrdenie, tak by bolo riešením číslo 4. To je však zároveň väčšie ako 3, teda opäť by bolo pravdivé posledné tvrdenie. Teda číslo 4 nie je mysleným číslom a mysleným číslom je číslo 5 (pravdivé je posledné tvrdenie, ostatné sú nepravdivé.

Iné riešenie: Podobne ako v prvom riešení vylúčime prvý riadok. Keďže ostali čísla 4, 5, 6, 7, 8, 9, tak posledné tvrdenie je určite pravdivé a ostatné sú nepravdivé. Teda myslené číslo nie je v prvom riadku, je v druhom stĺpci a nie je párne. Týmto podmienkam vyhovuje len číslo 5.

Miško si myslel číslo 5.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné štyrmi, ktorých ciferný súčet sa rovná siedmim a ciferný súčin šiestim.

Riešenie: Keďže ciferný súčin hľadaného čísla sa rovná šiestim, môže toto číslo obsahovať len cifry, ktoré sú deliteľmi čísla 6, teda 1, 2, 3 a 6. Teraz rozoberieme dve možnosti, ktoré môžu nastať: buď tam bude cifra 6, alebo tam budú cifry 2 a 3 (plus niekoľko jednotiek).

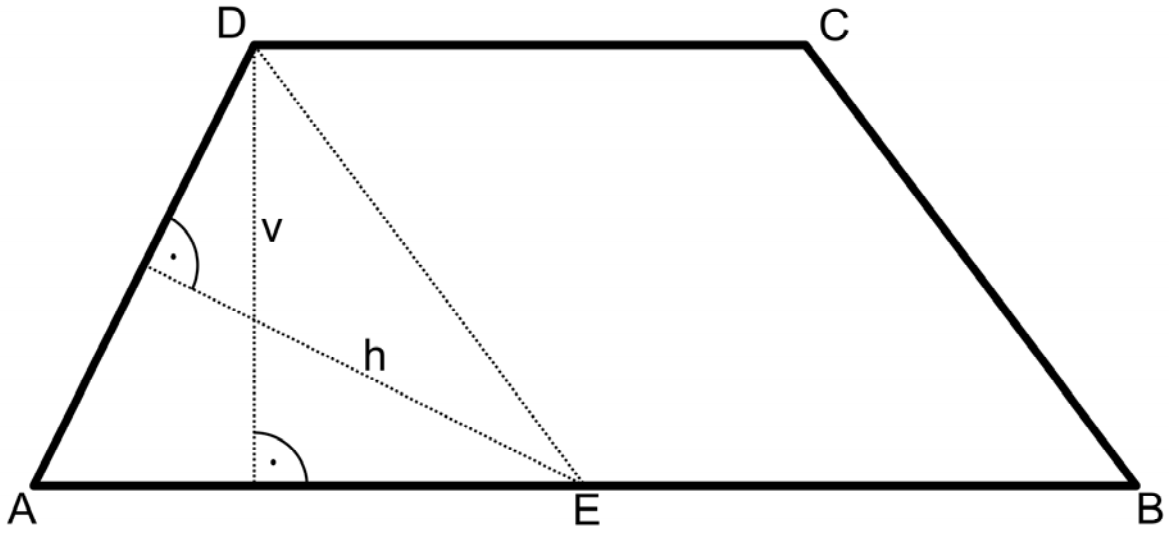
Ak číslo obsahuje cifru 6, potom ostatné cifry musia byť jednotky, aby bol ich súčin 6. Keďže jeho ciferný súčet sa rovná 7, tak jedinou možnosťou sú dve cifry – 1 a 6. Aby bolo toto číslo deliteľné 4, musí byť číslica na mieste jednotiek určite párna (to však nie je jediná podmienka, keďže číslo je deliteľné štyrmi práve vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi). Preto dostávame jedinú možnosť 16, ktorá aj vyhovuje.

Ak číslo obsahuje cifru 3, potom druhá cifra musí byť 2 a ostatné budú jednotky, aby sme dostali ciferný súčin 6. Keďže ciferný súčet má byť 7, musia tam byť ešte dve jednotky, lebo 7 – 5 = 2. Máme teda k dispozícii cifry 1, 1, 2, 3. Aby bolo číslo deliteľné štyrmi, musí byť jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi. Máme jedinú párnu číslicu 2, takže tá musí byť na mieste jednotiek. Keďže aj 12, aj 32 sú dvojčíslia deliteľné 4, vyhovujú ľubovoľné kombinácie číslic 1, 1 a 3, teda vyhovujú čísla 1 132, 1 312 a 3 112.

Úloha má štyri riešenia: 16, 1 132, 1 312 a 3 112.

4. V lichobežníku majú základne dĺžky 20 cm a 10 cm, ramená 10 cm a $4\sqrt{5}$ cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

Riešenie: Lichobežník zo zadania úlohy si označme *ABCD*, pričom $|AB| = 20$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|CD| = 10$ cm, $|DA| = 4\sqrt{5}$ cm. Bodom *D* veďme priamku rovnobežnú so stranou *BC,* ktorá pretne stranu *AB* v bode *E*. Trojuholník *DAE* je rovnoramenný, pretože platí $|AE| = |DE| = 10$ cm.



Veľkosť výšky *h* na stranu *AD* v tomto trojuholníku vypočítame pomocou Pytagorovej vety:

$$h = \sqrt{|AE|^2 - \left(\frac{|AD|}{2}\right)^2} = \sqrt{(10\text{ cm})^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}\text{ cm}}{2}\right)^2} = \sqrt{80\text{ cm}^2} = 4\sqrt{5}\text{ cm}.$$

Obsah trojuholníka *DAE* je potom

$$S_{DAE} = \frac{|AD| \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{5}\text{ cm} \cdot 4\sqrt{5}\text{ cm}}{2} = 40\text{ cm}^2.$$

Obsah tohto trojuholníka môžeme vypočítať aj pomocou vzorca

$$S_{DAE} = \frac{|AE| \cdot v}{2},$$

kde *v* je výška na stranu *AE* v trojuholníku *DAE*. Dosadením známym hodnôt do tohto vzťahu dostaneme, že platí

$$40\text{ cm}^2 = \frac{10\text{ cm} \cdot v}{2},$$

teda $v = 8$ cm. Obsah lichobežníka potom vypočítame ako

$$S_{ABCD} = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot v}{2} = \frac{(10\text{ cm} + 20\text{ cm}) \cdot 8\text{ cm}}{2} = 120\text{ cm}^2.$$

Obsah lichobežníka je 120 cm^2.

5. Na dvoch kolesách, ktoré sa zvonka dotýkajú, je natiahnutý pás. Určte jeho dĺžku, ak polomery kolies sú 15 cm a 45 cm.

Riešenie: Označme stred menšieho kolesa M a stred väčšieho kolesa V. Keďže polomer menšieho je 15 cm a väčšieho 45 cm, tak vzdialenosť bodov M a V bude

$$|MV| = 15 \text{ cm} + 45 \text{ cm} = 60 \text{ cm}.$$

Označme jeden dotykový bod menšieho kolesa a pásu T a jeden dotykový bod menšieho kolesa a pásu U podľa obrázka. Nech P je päta kolmice z bodu M na UV. Potom je $UPMT$ obdĺžnik, pretože uhly VUT a UTM sú pravé (TU je spoločná dotyčnica k obom kolesám, resp. kružniciam), uhol UPM je tiež pravý, a teda aj uhol TMP musí byť pravý.

Keďže $UPMT$ je obdĺžnik, platí $|UP| = |TM| = 15$ cm. Potom platí

$$|PV| = |UV| - |UP| = 45 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 30 \text{ cm}.$$

V pravouhlom trojuholníku PMV potom poznáme dĺžky dvoch strán ($|MV| = 60$ cm, $|PV| = 30$ cm) a môžeme pomocou Pytagorovej vety vypočítať dĺžku tretej strany MP:

$$|MP| = \sqrt{|MV|^2 - |PV|^2} = \sqrt{(60 \text{ cm})^2 - (30 \text{ cm})^2} = 30 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Pás pozostáva z dvoch takýchto modrých úsekov a dvoch častí kružníc, preto dĺžka rovných častí pásu je

$$d_1 = 2 \cdot 30 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Teraz nám ostáva ešte vypočítať dĺžky častí kružníc, ktoré tvoria pás. V pravouhlom trojuholníku PMV platí:

$$\cos|\sphericalangle PVM| = \frac{|PV|}{|MV|} = \frac{30 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = \frac{1}{2},$$

teda $|\sphericalangle PVM| = 60°$. Potom červená časť pravej kružnice zodpovedá stredovému uhlu

$$|\sphericalangle UVU'| = 360° - 2 \cdot 60° = 240°.$$

Jej dĺžka potom bude pomernou časťou dĺžky celej kružnice (obvodu kolesa), teda

$$d_2 = \frac{240°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 45 \text{ cm} = 60 \cdot \pi \text{ cm}.$$

Analogicky budeme postupovať aj pri menšom kolese. Najprv si vypočítame veľkosť uhla TMV: $|\sphericalangle TMV| = |\sphericalangle TMP| + |\sphericalangle PMV| = 90° + 30° = 120°$.

Potom pre veľkosť stredového uhla TMT' platí

$$|\sphericalangle TMT'| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle TMV| = 360° - 2 \cdot 120° = 120°.$$

Potom bude dĺžka zelenej časti menšej kružnice pomernou časťou dĺžky celej kružnice (obvodu kolesa), teda

$$d_3 = \frac{120°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15 \text{ cm} = 10 \cdot \pi \text{ cm}.$$

Celkovo dostávame, že dĺžka pásu je

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} + 60 \cdot \pi \text{ cm} + 10 \cdot \pi \text{ cm} = \left(60 \cdot \sqrt{3} + 70 \cdot \pi\right) \text{cm} = 323{,}83 \text{ cm}.$$

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z platí nerovnosť

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

(Neculai Stanciu, Titu Zvonaru, Rumunsko)

Riešenie: Pre všetky kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť $b(a-b)^2 \geq 0$, pričom rovnosť nastáva len pre $a = b$. Roznásobením tejto nerovnosti dostávame, že platí

$$a^2b - 2ab^2 + b^3 \geq 0.$$

Prenesením výrazu z ľavej strany na pravú a pripočítaním $2a^3$ k obom stranám nerovnosti dostávame, že platí

$$2a^3 \geq 2a^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \left(a^2 + b^2\right)(2a - b).$$

Predelením oboch strán nerovnosti kladným výrazom $2\left(a^2 + b^2\right)$ dostávame, že platí

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} \geq \frac{2a-b}{2}.$$

Ak teraz miesto a, b dosadíme postupne x, y; y, z a z, x a získané nerovnosti sčítame, dostaneme, že platí

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{2x-y}{2} + \frac{2y-z}{2} + \frac{2z-x}{2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Rovnosť nastáva len v prípade $x = y = z$.

Výsledková listina po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Por.	Priezvisko	Meno	Kategória	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	Spolu
1	Farkašovský	Tomáš	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	18	5	4	4	5			36
2.	Brčiak	Jakub	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	18	5	5	2	5			35
3.	Lopatková	Silvia	Z	ZŠ Štefana Kluberta Levoča	19	5	5	3	1			33
4.	Dlugošová	Michaela	C	G Kukučínova Poprad	18					5		23
5.	Bielená	Veronika	C	SOŠ Svit	12			2	1	3	0	18
6.	Grivalský	Jakub	C	SOŠ Svit	10							10