Ročník: 22
Číslo: 1
Šk. rok: 2016/2017

# Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl




*Matematika je veda o nekonečne, jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov.*

*Hermann Weyl*

# Redakčná pošta

Milí čitatelia,

vítam vás v 22. ročníku vydávania nášho časopisu. Vzhľadom na podporu z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky na vydávanie periodickej tlače dostávate tento časopis aj na vybraných základných a stredných školách zdarma. Verím, že vás náš časopis zaujme a žiaci z vašich škôl sa zapoja do našej korešpondenčnej súťaže.

V pravidelnej rubrike venovanej osobnostiam nájdete článok o Hermannovi Weylovi – matematikovi, ktorý skúmal symetrické náznaky vedy a umenia.

Do ďalšieho ročníka korešpondenčnej súťaže sme opäť pripravili sadu 14 súťažných úloh. Pre riešiteľov, ktorí sa chcú zúčastniť tejto súťaže prvýkrát, sme pripravili článok Skôr než začnete písať svoje riešenia, v ktorom nájdete niekoľko rád k tomu, ako písať riešenia súťažných úloh. Pre súťaživých čitateľov prinášame aj zadania úloh domáceho kola 66. ročníka Matematickej olympiády v kategóriách Z5 až Z9 a C až A.

V článku Uvidieť harmonický priemer uvidíte prepojenie geometrie a algebry – ako sa dá nájsť harmonický priemer aj v geometrických objektoch.

V seriáli Čriepky z histórie matematickej kultúry sa dozviete o zaujímavej číselnej postupnosti, ktorú poznáme pod názvom Fibonacciho postupnosť.

Prajem vám úspešný štart v novom školskom roku.

*Martin Hriňák*

# Hermann Weyl – symetrické náznaky vedy a umenia

## Obraz symetrie

V jaskyniach, na skalných útesoch či starovekých nádobách sa už tisíce rokov nachádzajú ľudské kresby, ornamenty. V neskorej dobe ľadovej vyrábal človek svoje pomôcky v geometrických tvaroch (trojuholník, kosoštvorec, lichobežník). Hrnčiarstvom a tkáčstvom sa rozvinul geometrický zmysel (zložité mozaiky, opakujúce sa špirály a meandre). Harmonické usporiadanie, rytmické pohyby, opakovanie prinášalo symetriu obrazcov. Napríklad staroegyptské ornamenty predstavujú 17 druhov symetrií. *Určitá vec je symetrická, ak v prípade, že s ňou niečo robíme, vyzerá na konci rovnako ako predtým.* Zdá sa, že už aj táto tvorivosť ukrýva v sebe matematickú informáciu. Jeden z významných matematikov, ktorý vnútorne prežíval súvislosti vedy a umenia, poznamenal: *Umenie ornamentu obsahuje najstaršiu časť nám známej vyššej matematiky... Symetria je idea, pomocou ktorej sa človek po celé stáročia usiloval vysvetliť a vytvoriť poriadok, krásu a dokonalosť.*




## Krása v matematike

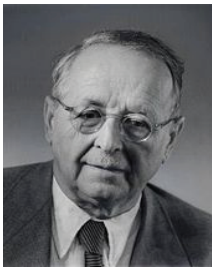


*Výraznosť a forma má pre mňa možno väčší význam ako obsah... Vo svojej práci som sa vždy pokúšal zjednotiť pravdu s krásou, ale keď som si mal zvoliť buď jedno alebo druhé, obvykle som si vybral krásu.* Matematikom, ktorý zvlášť intenzívne vnímal krásu ako svetlo pravdy, bol **Hermann Weyl** (9. 11. 1885 – 8. 12. 1955). Vyštudoval u Davida Hilberta v Göttingene, bol jeho najbystrejším študentom. Dvadsaťosemročný sa stal profesorom polytechniky v Zürichu, neskôr pôsobil v Göttingene. V roku 1933 emigroval do USA a pracoval v Ústave pre pokročilé štúdiá v Princetone. Potom sa vrátil späť do Zürichu (1951).



Zaujímal sa o trigonometrické rady, ortogonálne a periodické funkcie. Rozpracoval teóriu funkcií komplexnej premennej. Vytvoril spektrálnu teóriu diferenciálnych operátorov. Ovplyvnil aditívnu teóriu čísel, rozvinul teóriu spojitých grúp. Dokázal aplikovať moderné matematické poznatky na problémy geometrie i fyziky (teória relativity, interpretácia časopriestoru a hmoty). Metódou teórie grúp získal niektoré výsledky aj v teórii atómových spektier.

**Matematický platonik**



*Matematika nie je strnulá a ustrnutie pôsobiaca schéma, ako si to laici tak radi predstavujú, ale nás stavia priamo do priesečníka zviazanosti a slobody, ktorý je vlastnou podstatou človeka.* Nemecký matematik, fyzik a filozof H. Weyl, člen Americkej akadémie vied a umení, bol predstaviteľom umiernenej verzie intuicionizmu, smeru v zdôvodňovaní základov matematiky, ktorý chápal matematické entity ako reálne existujúce a prekračujúce ľudský tvorivý proces. Nekonštruktívny dôkaz existencie si cenil len ako list papiera, na ktorom je síce napísané, čo je v poklade, ale bez toho, kde poklad leží. Chcel, aby sa matematika zaoberala len definíciami, ktorým zodpovedá konštruktívny objekt, spochybňoval uplatňovanie zákona vylúčenia tretieho pre prípad nekonečných množín. Weyl raz prirovnal matematiku k mlynčeku na mäso: *Ak doň vložíte lobodu, loboda vám z neho aj vyjde.* Prehlásil: *Čistá matematika uznáva iba jednu, ale za to nevyhnutne povinnú podmienku pravdy – neprotirečenie.*

Pripomeňme si aj niektoré filozoficko-matematické impulzy, myšlienky H. Weyla: *Vo výstavbe matematiky existujú dve otvorené oblasti, kde sa veci môžu stať nevyspytateľnými: postup v postupnosti prirodzených čísel a kontinuum... V podstate nekonečna tkvie nevyčerpateľnosť... Pravé kontinuum je niečo súvislé v sebe a nemôže byť rozdelené na odlišné časti; to odporuje jeho povahe... Všeobecné súdy o číslach nemôžu byť získané skúmaním jednotlivých čísel, ale len skúmaním podstaty čísla... Výraz „existuje“ nás zväzuje s bytím a zákonom, výraz „každý“ nás stavia do vznikania a slobody.* S trochou úsmevu pripomenieme aj jeho uštipačnú poznámku: *Boh existuje, pretože matematika je konzistentná, a diabol tiež existuje, pretože to nemôžeme dokázať.*



Uznával matematiku ako intelektuálne dobrodružstvo tvorivého ľudského ducha. *Matematika je veda o nekonečne, jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov.* Hermann Weyl ponúkal matematické myslenie ako súčasť všeobecnej kultúry: *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta.* Schopnosť matematizovať naše skúsenosti nám otvára štruktúru nečakaných súvislostí. *Matematika je vo svojich základoch spojená so všeobecnými problémami poznania.*

*Dušan Jedinák*

# Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2016/2017

Redakcia časopisu MATMIX vyhlasuje v tomto školskom roku korešpondenčnú súťaž pre žiakov základných a stredných škôl. Zapojiť sa do nej môžu všetci, ktorí majú záujem o matematiku a sú ochotní venovať niekoľko minút riešeniu úloh. V školskom roku 2016/2017 bude mať korešpondenčná súťaž tri série. Zadania úloh budú uverejnené v prvom, druhom a treťom čísle časopisu. Výsledky korešpondenčnej súťaže budú priebežne zverejňované aj na internete na našej webovej stránke *www.matmix.sk*.

Žiakom druhého stupňa základnej školy a žiakom 1. až 4. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória Z a sú pre nich určené úlohy č. 1 až 4. Prvákom stredných škôl a žiakom 5. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória C s úlohami 3 až 6. Druhákom stredných škôl a žiakom 6. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória B s úlohami 5 až 8. Tretiakom a štvrtákom stredných škôl a žiakom 7. a 8. ročníka osemročných gymnázií je určená kategória A s úlohami 7 až 10. Žiakom, ktorí majú záujem o náročnejšie úlohy, je určená kategória π. Pre túto kategóriu sú v každej sérii určené úlohy 11 až 14. V prípade, že máte nejasnosti v zadaní alebo máte iné otázky, môžete svoje pripomienky adresovať na e-mailovú adresu matmix@matmix.sk.

Prihlášku do korešpondenčnej súťaže nám pošlite spolu s prvou sériou vašich riešení. Uveďte na nej svoje meno, priezvisko, školu, triedu a súťažnú kategóriu. Ak chcete dostávať svoje opravené riešenia s komentármi späť domov, napíšte nám to v prihláške a zašlite nám dve známky v hodnote 0,95 € (podľa platného cenníka Slovenskej pošty, pričom riešenia môžeme zasielať aj viacerým riešiteľom na jednu adresu). Zaslaním svojich riešení na našu adresu nám udeľujete súhlas na spracovanie zaslaných osobných údajov v zmysle § 7 zákona č. 428/2002 Z. z. o ochrane osobných údajov v platnom znení na spracúvanie týchto osobných údajov za účelom evidencie súťažiacich v korešpondenčnej súťaži časopisu MATMIX a pri jej vyhodnocovaní, za účelom vykonávania marketingových činností, napr. zasielania informačných mailov. Súčasne súhlasíte s využitím svojej e-mailovej adresy za účelom doručovania informácií a so zverejnením nasledujúcich údajov vo výsledkovej listine: meno, priezvisko, ročník, počet bodov, umiestnenie, škola. Súhlas sa poskytuje na dobu neurčitú a môže byť kedykoľvek odvolaný prostredníctvom písomného oznámenia o odvolaní doručeného do redakcie. Zároveň potvrdzujete, že ste boli riadne poučení o existencii práv dotknutej osoby uvedených v § 20 Zákona.

Upozorňujeme vás, aby ste riešenia písali **čitateľne** na papiere **formátu A4** (kancelársky papier) a na každé riešenie napísali **hlavičku** – svoje **meno, školu a číslo úlohy**. V prípade, že sa riešenie jednej úlohy nachádza na viacerých papieroch,

zopnite ich. Na jednom papieri nemôžu byť napísané riešenia viacerých úloh. **Hodnotiť budeme len také riešenia, ktoré budú spĺňať tieto kritériá.**

Do súťaže sa môžete zapojiť aj v druhej sérii. Podmienkou zaradenia do súťaže je aj v takomto prípade zaslanie prihlášky spolu s riešeniami, ktoré vypracujete.

**Riešenia súťažných úloh vypracujte sami!** V prípade, že zistíme, že nejaká skupina navzájom odpisovala, **každý** jej člen dostane za danú úlohu 0 bodov, aj keby bolo riešenie správne. Plný počet bodov (5) patrí len úplnému riešeniu. Preto treba zdôvodniť všetky tvrdenia, ktoré v riešení použijete. V prípade, že použijete vetu alebo tvrdenie, ktoré nie je všeobecne známe, uveďte aj literatúru, kde sa nachádza jeho dôkaz. Uvedenie iba výsledku nie je postačujúce. Ak niektorá úloha nemá riešenie, treba ukázať, prečo ho nemá.

Riešenia každej série zasielajte do uvedeného termínu – rozhoduje pečiatka na obálke (nezabudnite na pekné známky) Ak pošlete riešenia po tomto termíne, strhneme vám za každý deň omeškania jeden bod (pod 0 bodov však klesnúť nemôžete). Svoje riešenia píšte v slovenskom jazyku. Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
**MATMIX**
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

V prípade, že nebudete spokojní s ohodnotením vášho riešenia, môžete nám poslať reklamáciu spolu s vaším riešením, odôvodnením a požadovaným počtom bodov. Vaše riešenie si ešte raz prezrieme a oznámime vám výsledok.

Veľa zážitkov a krásnych chvíľ pri riešení súťažných úloh vám praje redakcia časopisu MATMIX.

**Prihláška do korešpondenčnej súťaže časopisu MATMIX**

Priezvisko: ..... Meno: .....

Kategória: ..... Trieda: .....

Škola: .....

E-mail: .....

Podpis: .....

# Skôr než začnete písať svoje riešenia

Vzhľadom na skúsenosti z minulých rokov sme sa rozhodli uverejniť zopár rád, ktoré vám môžu pomôcť pri písaní vášho riešenia, presnejšie, akých chýb sa máte vyvarovať.

Mnohí z vás používajú pri dokazovaní rovnosti dvoch čísel kalkulačku. Takéto riešenia nikdy nebudú hodnotené ako správne z jednoduchého dôvodu – kalkulačky majú len obmedzenú presnosť, a ak vám vyjde na kalkulačke, že sa dve čísla rovnajú, neznamená to nutne, že sa rovnajú aj v skutočnosti. Možno sa líšia už na prvom nezobrazovanom desatinnom mieste. Kalkulačku teda nemôžete používať na dokazovanie rovností. V prípade dokazovania nerovností ju však už môžete využiť v rozumnej miere – teda pri zisťovaní rozdielov na prvých dvoch – troch desatinných miestach. Napríklad na skonštatovanie, že $\pi^2 < 10$.

K riešeniam pomocou počítača: Je veľa úloh, v ktorých treba vyskúšať veľmi veľa možností, ak človek nenájde šikovnú skratku, ktorá mu počet týchto možností zníži. Preto napríklad riešenie typu „vyskúšame všetky možnosti“ nebude hodnotené ako správne. A to aj v prípade, že by ste v riešení uviedli úvahy o tom, že možností je len konečne veľa a podobne. V prípade, že chcete, aby ste za takéto riešenie získali nenulový počet bodov, musíte všetky možnosti vypísať, aby ste zistili, že to nie je tá správna cesta.

Taktiež si treba uvedomiť, že ak vypíšete niekoľko možností a pri nich dokážete, že tvrdenie platí, nie je to dôkaz tvrdenia vo všeobecnosti.

V prípade, ak máte dokázať nejaké tvrdenie a postupujete spôsobom, že predpokladáte platnosť tohto tvrdenia a dospejete k pravdivému tvrdeniu, tak ste nedokázali vôbec nič. Uvedieme príklad: Predpokladajme, že $1 = 2$. Vynásobením oboch strán rovnosti nulou dostávame pravdivé tvrdenie $0 = 0$. Môžeme teraz tvrdiť, že sme dokázali platnosť tvrdenia $1 = 2$? Sami vidíte, že sme nič nedokázali... Ak však používame ekvivalentné úpravy, už je to iné. Ale to treba spomenúť.

Pri písaní svojich riešení dávajte pozor aj na označenie, aby bolo jasné, čo čo znamená. Pri nesprávnom označení môžete stratiť body, aj keď je riešenie v princípe správne. Ďalej treba dávať pozor aj na to, aby ste na dvoch rôznych miestach neoznačili jedným označením dve rôzne skutočnosti.

Na záver vám odporúčame, aby ste si svoje riešenia nakoniec vždy ešte raz prečítali. Možno sami zistíte, že tomu, čo ste napísali, nerozumiete ani vy sami, lebo opravovatelia nemajú telepatické schopnosti.

*Martin Hriňák*

# Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

**1.** Štyri kuchárky v školskej jedálni načistia 5 kilogramov zemiakov za 10 minút. Koľko kuchárok rovnakej výkonnosti by muselo pracovať, aby stihli načistiť 9 kilogramov zemiakov za 12 minút?

**2.** Farmár chcel rozdeliť svoje stádo koní medzi štyroch synov. Najstaršiemu chcel dať tretinu, druhému najstaršiemu štvrtinu a dvom najmladším chcel dať každému pätinu počtu koní. Nevedel to urobiť presne bez toho, aby musel rozdeliť koňa. Potom sa mu narodilo žriebä, s ktorého pomocou dokázal svoje stádo požadovaným spôsobom rozdeliť medzi synov a navyše mu toto žriebä ostalo. Zistite, koľko koní malo farmárovo stádo pred narodením žriebäťa a koľko koní dostali jednotliví synovia.

**3.** Na záhradke je niekoľko mačiek a husí. Spolu ich je 90 a dokopy majú 258 nôh. Koľko je na dvore mačiek a koľko husí?

**4.** Deti na oslave jedli bonboniéru. Keď dojedli, mamička odpratala obal a spýtala sa, či si pamätajú koľko bonbónov zjedli. Keďže nevedeli, rozhodla sa im pomôcť. Orieškových bonbónov bolo o 10 viac ako višňových, mliečnych trikrát toľko čo višňových a zároveň rovnako ako orieškových a višňových dohromady. Koľko bonbónov bolo akej príchuti?

**5.** Súčin piatich prvočísel je šesťciferné číslo *ABCABC*, kde *A*, *B* a *C* sú cifry. Zistite hodnotu *A*, *B* a *C*, ak viete, že jedno z týchto piatich prvočísel je 491.

**6.** Horolezecká výprava vytesala do ľadovca časť číselnej osi (1, 2, 3, ...). V tých dňoch našli horolezci na ľadovci stopy bájneho snežného muža, ktorý sa vybral na prechádzku po tejto číselnej osi. Jedna zo stôp pochádzala od mláďaťa, ktoré malo nohu č. 3 – zakrývala totiž tri po sebe idúce prirodzené čísla. Súčet týchto čísel bol 2016. Na inom mieste našli bádatelia oveľa väčšiu stopu dospelého jedinca. Aj pre túto stopu platilo, že súčet čísel, ktoré zakrývala, bol 2016. Aké najväčšie číslo nohy mohol mat dospelý snežný muž, ktorý sa prechádzal po číselnej osi?

**7.** Z dvoch podobných trojuholníkov má jeden obvod 100 jednotiek a druhý má strany postupne o 8, 14 a 18 jednotiek väčšie ako prvý. Vypočítajte dĺžky strán oboch trojuholníkov.

**8.** Štvorec *ABCD* má veľkosť strany 6 cm. Stredy strán *AB* a *AD* označme ako body *E* a *F*. Úsečky *CF* a *DE* rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov.

**9.** Dokážte, že číslo $2^{1092}-1$ je deliteľné číslom $1093^2$.

**10.** Nájdite všetky prirodzené čísla *m*, *n*, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m-3^n=7$.

**11.** Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

**12.** Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc.$$

**13.** Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$, pričom $a_1=20$, $a_2=30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n+1$ druhou mocninou celého čísla.

**14.** Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n\geq 6^n\cdot\left(n!\right)^2$$

**Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 28. 11. 2016**

Riešenia zasielajte na adresu:

**MATMIX**
Ing. Mgr. Martin Hriňák
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

# Zadania úloh domáceho kola 66. ročníka Matematickej olympiády

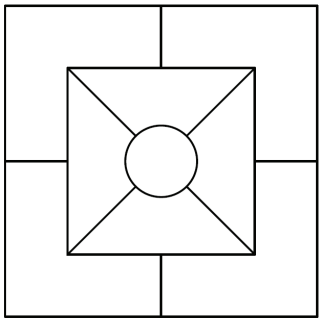
## Kategória Z5

**1.** Zvonkohra na nádvorí hrá o každej celej hodine krátku skladbu, a to počínajúc 8. a končiac 22. hodinou. Skladieb je celkom osemnásť, o celej hodine sa hrá vždy iba jedna a po odohraní všetkých osemnástich sa začína v rovnakom poradí znova. Oľga a Ľuboš boli na nádvorí v pondelok o 15. hodine. Ten istý týždeň si prišli zvonkohru vypočuť ešte raz na poludnie, na ich sklamanie však hrala tá istá melódia, ktorú počuli v pondelok. Ktorý deň bola Oľga s Ľubošom na nádvorí druhý raz?

(Libor Šimůnek)

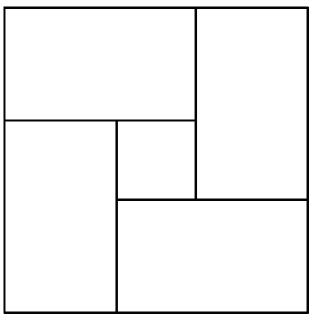
**2.** V každom z rohových políčok vonkajšieho štvorca má byť napísané jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, pričom v rôznych políčkach majú byť rôzne čísla. V štyroch políčkach vnútorného štvorca majú byť súčiny čísel zo susediacich políčok vonkajšieho štvorca. V kruhu má byť súčet čísel zo susediacich políčok vnútorného štvorca. Ktoré čísla môžu byť napísané v kruhu? Určte všetky možnosti.

(Monika Dillingerová)



**3.** Na obrázku je štvorcová dlaždica so stranou dĺžky 10 dm, ktorá je zložená zo štyroch zhodných obdĺžnikov a malého štvorca. Obvod malého štvorca je päťkrát menší ako obvod celej dlaždice. Určte rozmery obdĺžnikov.

(Karel Pazourek)



**4.** Predavač vianočných stromčekov predával smriečky po 22 €, borovičky po 25 € a jedličky po 33 €. Ráno mal rovnaký počet smriečkov, jedličiek a borovíc. Večer mal všetky stromčeky predané a celkom za ne utŕžil 3 600 €. Koľko stromčekov v ten deň predavač predal?

(Marie Krejčová)

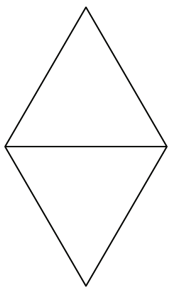
**5.** Napíšte namiesto hviezdičiek cifry tak, aby súčet doplnených cifier bol nepárny a aby platila uvedená rovnosť:

$$42 \cdot *8 = 2***$$

(Libuše Hozová)

**6.** Jarka zostrojila dva zhodné rovnostranné trojuholníky ako na obrázku. Ďalej chce zostrojiť všetky kružnice, ktoré budú mať stred v niektorom z vrcholov a budú prechádzať niektorým iným vrcholom niektorého z trojuholníkov. Zostrojte a spočítajte všetky kružnice vyhovujúce Jarkiným požiadavkám.

(Karel Pazourek)



## Kategória Z6

**1.** Jana a Dávid trénujú sčítanie desatinných čísel tak, že každý z nich napíše jedno číslo a tieto dve čísla potom sčítajú. Posledný príklad im vyšiel 11,11. Dávidovo číslo malo pred desatinnou čiarkou rovnaký počet cifier ako za ňou, Janino číslo tiež. Dávidovo číslo bolo zapísané navzájom rôznymi ciframi, Janino číslo malo práve dve cifry rovnaké. Určte najväčšie možné číslo, ktoré mohol napísať Dávid.

(Michaela Petrová)

**2.** Pán Kockorád vlastnil záhradu obdĺžnikového tvaru, na ktorej postupne dláždil chodníky z jednej strany na druhú. Chodníky boli rovnako široké, križovali sa na dvoch miestach a už vydláždená plocha sa pri ďalšom dláždení preskakovala. Keď

pán Kockorád vydláždil chodník rovnobežný s dlhšou stranou, spotreboval 228 $m^2$ dlažby. Potom vydláždil chodník rovnobežný s kratšou stranou a spotreboval 117 $m^2$ dlažby. Nakoniec vydláždil ešte jeden chodník rovnobežný s prvým chodníkom, tentoraz spotreboval len 219 $m^2$ dlažby. Určte rozmery Kockorádovej záhrady.

(Michaela Petrová)

**3.** Mnohonožka Mirka pozostáva z hlavy a niekoľkých článkov, na každom článku má jeden pár nôh. Keď sa ochladilo, rozhodla sa, že sa oblečie. Preto si na treťom článku od konca a potom na každom ďalšom treťom článku obliekla ponožku na ľavú nôžku. Podobne si na piatom článku od konca a potom na každom ďalšom piatom článku obliekla ponožku na pravú nôžku. Napokon zistila, že na 14 článkoch jej zostali obe nohy bosé. Zistite, koľko celkom nôh mohla mať mnohonožka Mirka; určte všetky možnosti.

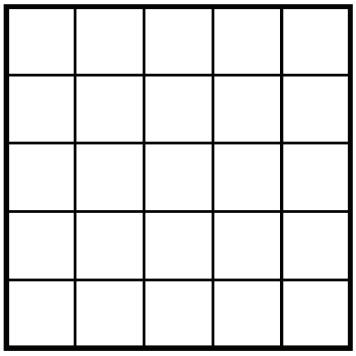
(Erika Novotná)

**4.** Štyri rodiny boli na spoločnom výlete. V prvej rodine boli traja súrodenci, a to Alica, Betka a Cyril. V druhej rodine boli štyria súrodenci, a to Dávid, Erika, Filip a Gabika. V tretej rodine boli dvaja súrodenci, a to Hugo a Iveta. Vo štvrtej rodine boli traja súrodenci, a to Ján, Karol a Lukáš. Cestou sa deti rozdelili na skupiny tak, že v každej skupine boli všetky deti s rovnakým počtom bratov a nikto iný. Ako sa mohli deti rozdeliť? Určte všetky možnosti.

(Veronika Hucíková)

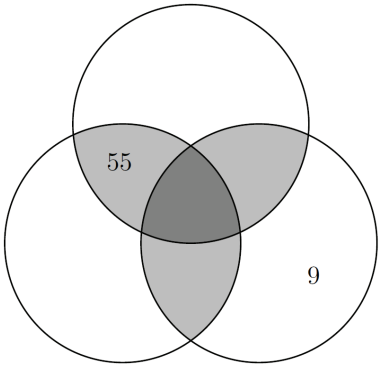
**5.** Juro si nakreslil štvorcovú sieť s 25 štvorčekmi, pozri obrázok. Potom chcel každý štvorček vyfarbiť tak, aby rovnako vyfarbené štvorčeky nemali spoločný žiadny vrchol. Koľko najmenej farieb musel Juro použiť?

(Monika Dillingerová)



**6.** Do prázdnych políčok v nasledujúcom obrázku doplňte celé čísla väčšie ako 1 tak, aby v každom tmavšom políčku bol súčin čísel zo susedných svetlejších políčok.

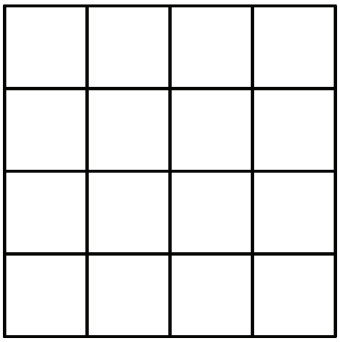
(T. Salčák)




## Kategória Z7

**1.** Štvorec so stranou 4 cm je rozdelený na štvorčeky so stranou 1 cm ako na obrázku. Rozdeľte štvorec pozdĺž vyznačených čiar na dva útvary s obvodom 16 cm. Nájdite aspoň tri rôzne riešenia (tzn. také tri riešenia, aby žiadny útvar jedného riešenia nebol zhodný so žiadnym útvarom iného riešenia).

(Veronika Hucíková)



**2.** Na lyžiarske sústredenie prišli 4 kamaráti zo 4 svetových strán a viedli nasledujúci rozhovor.

Karol: „Neprišiel som zo severu ani z juhu.“

Mojmír: „Zato ja som prišiel z juhu.“

Jozef: „Prišiel som zo severu.“

Zdeno: „Ja som z juhu neprišiel.“

Vieme, že jedna výpoveď nie je pravdivá. Určte, ktorá to je. Kto teda prišiel zo severu a kto z juhu?

(Marta Volfová)

**3.** Anička má 5 €, Anežka má 4,60 € a za všetky peniaze chcú kúpiť zákusky na rodinnú oslavu. Rozhodujú sa medzi tortičkami a veterníkmi: veterník je o 0,40 € drahší ako tortička a tortičiek by sa dalo za všetky peniaze kúpiť o tretinu viac ako veterníkov. Koľko stojí každý zo zákuskov?

(Marta Volfová)

**4.** Napíšte namiesto hviezdičiek cifry tak, aby nasledujúci zápis súčinu dvoch čísel bol platný:

$$\begin{array}{r} \ast\ \ast\ \ast \\ \cdot\quad \ast\ \ast\ \ast \\ \hline \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ 4\ 9\ 4\ 9 \\ \ast\ \ast\ \ast \\ \hline \ast\ \ast\ \ast\ 4\ \ast\ \ast \end{array}$$

(Libuše Hozová)

**5.** Daný je trojuholník $ABC$ so stranami $|AB| = 3\,\text{cm}$, $|BC| = 10\,\text{cm}$ a s uhlom $ABC$ s veľkosťou 120°. Narysujte všetky body $X$ také, aby platilo, že trojuholník $BCX$ je rovnoramenný a súčasne trojuholník $ABX$ je rovnoramenný so základňou $AB$.

(Eva Semerádová)

**6.** Určte, pre koľko prirodzených čísel väčších ako 900 a menších ako 1 001 platí, že ciferný súčet ciferného súčtu ich ciferného súčtu sa rovná 1.

(Eva Semerádová)

## Kategória Z8

**1.** Tri kamarátky veveričky spolu vyrazili na zber lieskových orieškov. Ryšavka ich našla dvakrát viac ako Pizizubka a Uška dokonca trikrát viac ako Pizizubka. Cestou domov sa zhovárali a pritom lúskali a jedli svoje oriešky. Pizizubka zjedla polovicu všetkých orieškov, ktoré nazbierala, Ryšavka tretinu všetkých svojich orieškov a Uška štvrtinu tých svojich. Doma veveričky zistili, že im dokopy zvýšilo 196 orieškov. Koľko orieškov našla každá z veveričiek?

(Michaela Petrová)

**2.** Na každej stene pravidelného osemstena je napísané jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, pričom na rôznych stenách sú rôzne čísla. Pre každú stenu Jaro určil súčet čísla na nej napísaného s číslami troch susedných stien. Takto dostal osem súčtov, ktoré tiež sčítal. Aké hodnoty môže tento výsledný súčet nadobúdať?

(Jaroslav Zhouf)

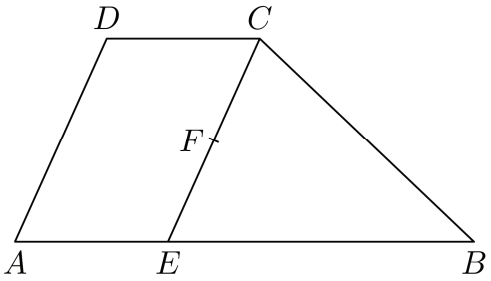
**3.** Pri streľbe z luku sa okrem iného sleduje výkonnosť strelca. Tá sa počíta tak, že sa zo všetkých pokusov odoberie jeden najlepší a jeden najhorší a z hodnotenia zvyšných sa spočíta aritmetický priemer. Kamaráti Peter, Juraj, Michal a Zdeno strieľali po jednom šípe v štyroch kolách. Každá strela bola hodnotená celým číslom od 0 do 10. V každom kole bol súčet hodnotení všetkých chlapcov 32 bodov, ale ani v jednom kole nemali žiadni dvaja chlapci rovnaké hodnotenie. V nasledujúcej tabuľke sú vyplnené iba niektoré údaje z uvedeného zápasu, doplňte tie chýbajúce.

| | 1. kolo | 2. kolo | 3. kolo | 4. kolo | výkonnosť |
|---|---|---|---|---|---|
| Peter | | | | 5 | 10 |
| Juraj | | | 9 | 10 | 7,5 |
| Michal | | | 5 | | 8 |
| Zdeno | | | | | 8,5 |
| celkom | 32 | 32 | 32 | 32 | – |

(Monika Dillingerová)

**4.** Lichobežník $ABCD$ je úsečkou $CE$ rozdelený na trojuholník a rovnobežník, pozri obrázok. Bod $F$ je stredom úsečky $CE$, priamka $DF$ prechádza stredom úsečky $BE$ a obsah trojuholníka $CDE$ je 3 cm$^2$. Určte obsah lichobežníka $ABCD$.

(Eva Semerádová)



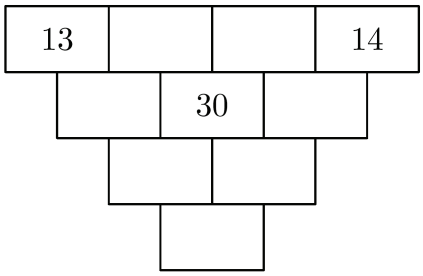

**5.** Mamička doniesla 10 zákuskov troch druhov: kokosiek bolo menej ako laskoniek a najviac bolo karamelových kociek. Jozef si vybral dva zákusky rôznych druhov,

Jakub urobil to isté a na Jána zvýšili iba zákusky rovnakého druhu. Koľko kokosiek, laskoniek a karamelových kociek mamička doniesla?

(Veronika Hucíková)

**6.** Každá tehlička nasledujúcej pyramídy obsahuje jedno číslo. Kedykoľvek to je možné, je číslo v každej tehličke najmenším spoločným násobkom čísel z dvoch tehličiek ležiacich priamo na nej. Ktoré číslo môže byť v najspodnejšej tehličke? Určte všetky možnosti.

(Alžbeta Bohiniková)



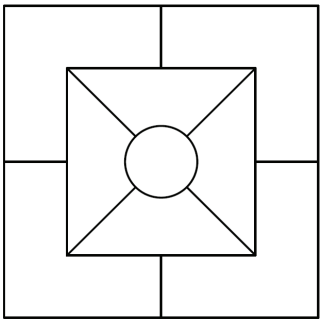

## Kategória Z9

**1.** Vo všetkých deviatich políčkach útvaru majú byť vyplnené prirodzené čísla tak, aby platilo:

- každé z čísel 2, 4, 6 a 8 je použité aspoň raz,
- štyri políčka vnútorného štvorca obsahujú súčiny čísel zo susediacich políčok vonkajšieho štvorca,
- v kruhu je súčet čísel zo susediacich políčok vnútorného štvorca.

Zistite, ktoré najmenšie a ktoré najväčšie číslo môže byť napísané v kruhu.

(Monika Dillingerová)



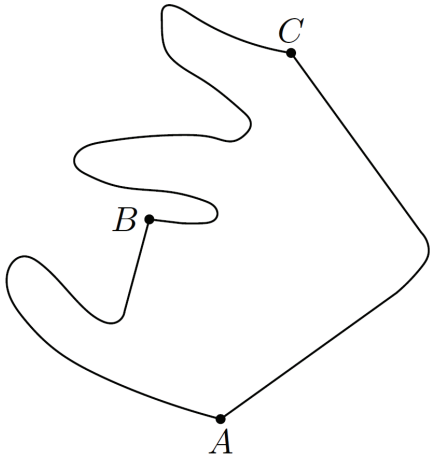
**2.** Z bodu A do bodu C vedie náučný chodník prechádzajúci bodom B a inakadiaľ tiež červená turistická značka, pozri obrázok. Okrem toho sa dá použiť aj

nezakreslená skratka dlhá 1 500 metrov začínajúca v A a ústiaca na náučnom chodníku. Vojtech zistil, že

- výlet z A po červenej do C a po náučnom chodníku späť do A je dlhý 7 700 metrov,
- výlet z B po náučnom chodníku do C a potom po červenej do A je dlhý 5 800 metrov,
- s využitím skratky je cesta z A do B dlhá 1 700 metrov,
- výlet z A po náučnom chodníku do C a späť do A najskôr po náučnom chodníku a potom po skratke je dlhý 8 800 metrov.

Určte dĺžku náučného chodníka z A do C. Pokiaľ zadanie pripúšťa viac odpovedí, uveďte všetky.

(Libor Šimůnek)




**3.** Júlii sa zakotúľala loptička do bazéna a plávala vo vode. Jej najvyšší bod bol 2 cm nad hladinou. Priemer kružnice, ktorú vyznačila hladina vody na povrchu loptičky, bol 8 cm. Určte priemer Júliinej loptičky.

(Libuše Hozová)

**4.** Katka si myslela päťciferné prirodzené číslo. Do zošita napísala na prvý riadok súčet mysleného čísla a polovice mysleného čísla. Na druhý riadok napísala súčet mysleného čísla a pätiny mysleného čísla. Na tretí riadok napísala súčet mysleného čísla a devätiny mysleného čísla. Nakoniec sčítala všetky tri zapísané čísla a výsledok napísala na štvrtý riadok. Potom s úžasom zistila, že na štvrtom riadku má zapísanú tretiu mocninu istého prirodzeného čísla. Určte najmenšie číslo, ktoré si Katka mohla myslieť na začiatku.

(Lucia Růžičková)

**5.** Myšky si postavili podzemný domček pozostávajúci z komôrok a tunelčekov:

- každý tunelček vedie z komôrky do komôrky (tzn. žiadny nie je slepý),
- z každej komôrky vedú práve tri tunelčeky do troch rôznych komôrok,
- z každej komôrky sa dá tunelčekmi dostať do ktorejkoľvek inej komôrky,
- v domčeku je práve jeden tunelček taký, že jeho zasypaním sa domček rozdelí na dve oddelené časti.

Koľko najmenej komôrok mohol mať myší domček? Načrtnite, ako mohli byť komôrky pospájané.

(Alžbeta Bohiniková)

**6.** Daná je úsečka $AB$ dĺžky 12 cm, na ktorej je jednou stranou položený štvorec $MRAK$ so stranou dĺžky 2 cm, pozri obrázok. $MRAK$ sa postupne preklápa po úsečke $AB$, pričom bod $R$ zanecháva na papieri stopu. Narysujte celú stopu bodu $R$, kým štvorec neobíde úsečku $AB$ z oboch strán a nevráti sa do svojej pôvodnej polohy.

(Monika Dillingerová)




## Kategória C

**1.** Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo $a$ platí nerovnosť

$$a^2+\frac{1}{a^2-a+1}\geq a+1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť.

(Jaroslav Švrček)

**2.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo $d$, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$ je hodnota výrazu

$$V(n)=n^4+11n^2-12$$

deliteľná číslom $d$.

(Aleš Kobza)

**3.** Päta výšky z vrcholu $C$ v trojuholníku $ABC$ delí stranu $AB$ v pomere 1 : 2. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka $ABC$ platí nerovnosť $3|a-b|<c$.

(Jaroslav Švrček)

**4.** Nájdite všetky trojčleny $P(x)=ax^2+bx+c$ s celočíselnými koeficientmi $a$, $b$, $c$, pre ktoré platí $P(1)<P(2)<P(3)$ a zároveň $(P(1))^2+(P(2))^2+(P(3))^2=22$.

(Tomáš Jurík)

**5.** V danom trojuholníku $ABC$ zvoľme vnútri strany $AC$ body $K$, $M$ a vnútri strany $BC$ body $L$, $N$ tak, že $|AK|=|KM|=|MC|$, $|BL|=|LN|=|NC|$. Ďalej označme $E$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, $F$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a $G$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body $E$, $F$ a $G$ ležia na ťažnici z vrcholu $C$ trojuholníka $ABC$ a určte pomer $|GF|:|EF|$.

(Šárka Gergelitsová)

**6.** a) Marienka rozmiestni do vrcholov pravidelného osemuholníka rôzne počty od jedného po osem cukríkov. Peter si potom môže vybrať, ktoré tri kôpky cukríkov dá Marienke, ostatné si ponechá. Jedinou podmienkou je, že tieto tri kôpky ležia vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka. Marienka chce rozmiestniť cukríky tak, aby ich dostala čo najviac, nech už Peter trojicu vrcholov vyberie akokoľvek. Koľko ich tak Marienka zaručene získa?

b) Rovnakú úlohu vyriešte aj pre pravidelný deväťuholník, do ktorého vrcholov rozmiestni Marienka 1 až 9 cukríkov. (Medzi rovnoramenné trojuholníky zaraďujeme aj trojuholníky rovnostranné.)

(Jaromír Šimša)

## Kategória B

**1.** Každému vrcholu pravidelného 66-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo −1. Ku každej úsečke spájajúcej dva jeho vrcholy (strane či uhlopriečke) potom pripíšeme súčin čísel v jej krajných bodoch a všetky čísla pri jednotlivých úsečkách sčítame. Určte najmenšiu možnú a najmenšiu nezápornú hodnotu takéhoto súčtu.

(Pavel Calábek)

**2.** Určte všetky dvojice ($a$, $b$) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte.

(Jaroslav Švrček)

**3.** Na kružnici k sú zvolené body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ (v tomto poradí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokážte, že ťažiská trojuholníkov $ABD$, $ACD$ a $BDE$ ležia na kružnici sústrednej s kružnicou $k$.

(Tomáš Jurík)

**4.** Nájdite všetky osemciferné čísla $*2*0*1*6$ so štyrmi neznámymi nepárnymi ciframi vyznačenými hviezdičkami, ktoré sú deliteľné číslom 2 016.

(Jaromír Šimša)

**5.** Daný je pravouhlý trojuholník $ABC$ s preponou $AB$. Označme $D$ pätu jeho výšky z vrcholu $C$ a $M$, $N$ priesečníky osí uhlov $ADC$, $BDC$ so stranami $AC$, $BC$. Dokážte, že platí

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(Jaroslav Švrček)

**6.** Určte všetky reálne čísla $r$ také, že nerovnosť $a^3 + ab + b^3 \geq a^2 + b^2$ platí pre všetky dvojice reálnych čísel $a$, $b$, ktoré sú väčšie alebo rovné $r$.

(Ján Mazák)

## Kategória A

**1.** Nájdite všetky prvočísla $p$, pre ktoré existuje prirodzené číslo $n$ také, že $p^n + 1$ je treťou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

(Ján Mazák, Róbert Tóth)

**2.** Máme $n^2$ prázdnych škatúľ; každá z nich má štvorcové dno. Výška aj šírka každej škatule je prirodzené číslo z množiny $\{1, 2, ..., n\}$. Každé dve škatule sa líšia aspoň

v jednom z týchto dvoch rozmerov. Jednu škatuľu je dovolené vložiť do druhej, ak má oba rozmery menšie a aspoň jeden z rozmerov má aspoň o 2 menší. Takto môžeme vytvoriť postupnosť škatúľ vložených navzájom do seba (t. j. prvá škatuľa je vnútri druhej, druhá škatuľa je vnútri tretej atď.). Každú takúto sadu uložíme na inú poličku. Určte najmenší možný počet poličiek potrebný na uskladnenie všetkých $n^2$ škatúľ.

(Peter Novotný)

**3.** Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$ s výškami $AK$, $BL$, $CM$. Dokážte, že trojuholník $ABC$ je rovnoramenný práve vtedy, keď platí rovnosť

$$|AM|+|BK|+|CL|=|AL|+|BM|+|CK|.$$

(Jaromír Šimša)

**4.** Nájdite všetky funkcie $f:\ \to\ $, ktoré majú pre každé prirodzené číslo $m$ nasledujúcu vlastnosť: Ak označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všetky delitele čísla $m$, platí

$$f(d_1)\cdot f(d_2)\cdot \ldots \cdot f(d_n)=m.$$

(Pavel Calábek)

**5.** Vnútri základne $AB$ rovnoramenného trojuholníka $ABC$ leží bod $D$. Zvoľme bod $E$ tak, aby $ADEC$ bol rovnobežník. Na polpriamke opačnej k $ED$ leží bod $F$ taký, že $|EB|=|EF|$. Dokážte, že dĺžka tetivy, ktorú vytína priamka $BE$ na kružnici opísanej trojuholníku $ABF$, je dvojnásobkom dĺžky úsečky $AC$.

(Jan Kuchařík, Patrik Bak)

**6.** Vyriešte v obore reálnych čísel sústavu rovníc

$$\begin{aligned} k-x^2&=y,\\ k-y^2&=z,\\ k-z^2&=u,\\ k-u^2&=x \end{aligned}$$

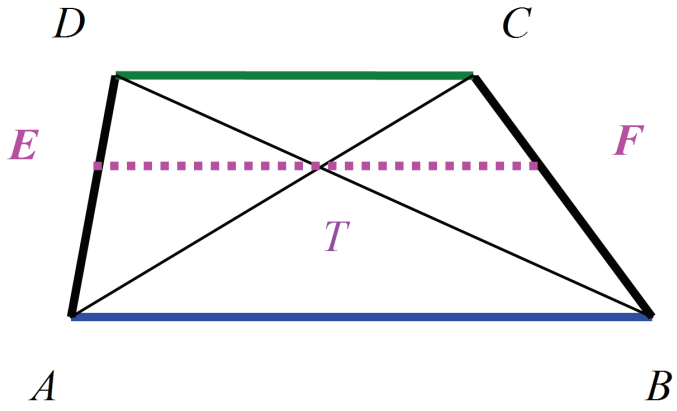
s reálnym parametrom $k$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$.

(Jaroslav Švrček)

# Uvidieť harmonický priemer

**Úloha:** Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

**Riešenie:** Označme patričné body ako na obrázku, kde $|AB| = a, |CD| = c$.




Trojuholníky $ABT$ a $CDT$ sú podobné podľa vety *uu* (rovnobežky $AB$, $CD$ sú preťaté priečkami $AC$, $BD$, a tak dve dvojice zodpovedajúcich si uhlov v týchto trojuholníkoch tvoria striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = a : c$, t. j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$.

Trojuholníky $TFC$ a $ABC$ sú tiež podobné podľa vety *uu* s koeficientom podobnosti $\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}$. Teda môžeme vyjadriť $|TF| = |AB| \cdot \frac{|TC|}{|AC|}$, teda platí

$$|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Podobne pre trojuholníky $TEA$ a $CDA$ s koeficientom podobnosti $\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET| = c \cdot \frac{|AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí $|EF| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$, čo je **harmonický priemer *a*, *c***.

*Dušan Jedinák*

# Čriepky z histórie matematickej kultúry

## Zaujímavá číselná postupnosť

Pozrite sa na postupnosť čísiel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Viete podľa spoznaného pravidla napísať ďalšie čísla? Od tretieho čísla počínajúc, vzniká táto postupnosť čísiel tak, že súčet predchádzajúcich dvoch je hľadaným ďalším číslom. Teda pre každé $i \geq 3$ platí $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$. Postupnosť s touto vlastnosťou je príkladom rekurentnej postupnosti, lebo keď chcete poznať ďalší člen, musíte „bežať späť“ (latinsky *recurrere*), aby ste podľa určitého pravidla použili predchádzajúce členy. Spomínanú postupnosť dnes nazývame *Fibonacciho postupnosť*. Takto ju pomenoval francúzsky matematik F. Lucas (1842 – 1891) na pamiatku jedného z najlepších matematikov celého stredoveku. Leonardo z Pisy (okolo rokov 1170 – 1240; na obrázku), prezývaný Fibonacci (dobrákov syn), napísal významnú učebnicu *Liber abaci – Kniha o abaku* (1202, doplnená 1228; tu sa pod pojmom abakus rozumie aritmetika). Obsahovala výklad o výhodách indicko-arabského desiatkového pozičného systému aj aritmetiku i algebru lineárnych a kvadratických rovníc v plnej hĺbke a úplnosti. Fibonacci skúmal aj rozklad čísiel na súčin prvočísiel, odhaľoval kritériá deliteľnosti, napr. číslami 2, 3, 5, 9. Podal výklad poznatkov o úmerách. Zlomky upravoval na najmenších spoločných menovateľov. Ako prvý v Európe prišiel na myšlienku zaviesť záporné čísla a predstavoval si ich ako dlh. Vedel dobre riešiť neurčité rovnice i približne určovať druhé i tretie odmocniny. Luca Pacioli (1445 – 1514) zaradil tieto poznatky do svojej *Summy aritmetiky* (vyšla tlačou v Benátkach, 1494). Leonardo Pisánsky prispel v Európe k zavedeniu indických cifier a nuly. Samostatne rozpracoval nové algebrické postupy pre kupecké počty i geometrické problémy, približné výpočty aj teóriu čísiel. Vytvoril nové pôvodné úlohy, kládol dôraz na dôkazy. Stal sa prvým európskym stredovekým matematikom, ktorý zvládol arabskú matematiku, sprostredkoval ju, ale aj obohatil. Spoznal, že aritmetika, algebra a geometria spolu súvisia a vytvárajú matematickú jednotu. Na jeho počesť nazývame identitu $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$ *Fibonacciho identita*.



*Dušan Jedinák*

# Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Hermann Weyl – symetrické náznaky vedy a umenia ..... 1
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2016/2017 ..... 3
Skôr než začnete písať svoje riešenia ..... 5
Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže ..... 6
Zadania úloh domáceho kola 66. ročníka Matematickej olympiády ..... 8
Kategória Z5 ..... 8
Kategória Z6 ..... 9
Kategória Z7 ..... 11
Kategória Z8 ..... 12
Kategória Z9 ..... 14
Kategória C ..... 16
Kategória B ..... 17
Kategória A ..... 18
Uvidieť harmonický priemer ..... 20
Čriepky z histórie matematickej kultúry ..... 3. strana obálky

---

**MATMIX –** matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, a APROMOD, s. r. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

**Vydávanie časopisu je spolufinancované z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky.**

**Šéfredaktor:** Ing. Mgr. Martin Hriňák
**Redakcia:** Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková, PhD.
**Vydavateľ:** Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
**Distribúcia:** APROMOD, s. r. o., Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
**Adresa redakcie:** Ing. Mgr. Martin Hriňák, MATMIX, Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
**Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. Október 2016.**
**E-mail:** matmix@matmix.sk
**Webová stránka:** http://www.matmix.sk
**Registračné číslo MK SR:** EV 2029/08
**ISSN:** 1336-7854

