Ročník: 23
Číslo: 2
Šk. rok: 2017/2018

Matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl



Meraj všetko, čo je merateľné, a nemerateľné urob merateľným.

Galileo Galilei

Redakčná pošta

Milí čitatelia,

v tomto predvianočnom čísle začíname historický seriál článkom o Alanovi Turingovi, človekovi, po ktorom je pomenovaný aj tzv. Turingov stroj, ktorý je známy najmä v oblasti teoretickej informatiky, ktorá je zase veľmi úzko prepojená s matematikou.

Na dlhé zimné večery sme vám priniesli sériu 17 úloh pre rok 2017. Ako už samotný názov naznačuje, ide o úlohy, v ktorých má hlavné slovo číslo 2017. Zároveň vám prinášame aj riešenia týchto úloh, aby ste si mohli skontrolovať svoje riešenia. Ďalšia séria úloh je spojená s lichobežníkmi – podarí sa vám vyriešiť všetky úlohy?

V korešpondenčnej súťaži v školskom roku 2017/2018 vám prinášame riešenia prvej série úloh a zadania druhej série súťažných úloh.

V článku Kružnice, špirály a ruže v polárnych súradniciach vám prinášame krátky úvod do polárnych súradníc a zároveň prinášame aj jednu úlohu na zamyslenie. Ak sa vám ju podarí vyriešiť, pošlite nám svoje riešenie a ak bude správne, uverejníme ho v nasledujúcom čísle časopisu.

Prajem vám pokojný záver roka a všetko dobré v tom novom.

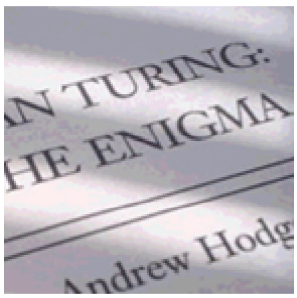
Martin Hriňák

Alan Turing



Kultúrne dejiny ľudstva už dlho poznajú rôzne spôsoby utajovania. Šifrované správy rozhodovali o osude štátov i jednotlivcov. Z kryptológie sa vyvinula veda s počítačovým vybavením a nezanedbateľným matematickým softwarom. K matematikom, ktorí prispeli k tvorbe šifrovacieho pristroja (AGNES), patrí **Alan Mathison Turing** (23. 6. 1912 – 7. 6. 1954), priekopník zostrojenia elektronických samočinných počítačov.

Mal veľmi vzdelaných rodičov, ktorí sa zosobášili v Indii. Školu navštevoval v Sherborne a potom študoval matematiku na univerzite v Cambridge. Bol kritizovaný za svoj rukopis, zápasil s angličtinou, z chémie si robil vlastné experimenty, mal svoj myšlienkový svet, v ktorom mali svoje miesto aj teória relativity a kvantová mechanika. V roku 1934 promoval, v roku 1935 sa stal členom Kráľovského kolégia a obhajoval dizertačnú prácu na tému Základná limitná veta pravdepodobnosti. V rokoch 1936 – 1938 študoval na univerzite v Princetone (doktorát u A. Churcha). Počas 2. svetovej vojny bol aj dôstojníkom pre dekódovanie. Od roku 1945 pracoval v národnom fyzikálnom laboratóriu. Neskôr



prešiel na univerzitu do Manchesteru. V roku 1951 sa stal členom Londýnskej kráľovskej spoločnosti. V roku 1952 bol väznený za násilné protesty proti obmedzeniam britských homosexuálov. Nečakaná smrť prišla 7. júna 1954 vo Wilmslowe. Vyšetrovanie určilo za príčinu smrti samovraždu otrávením kyanidom. Jeho matka tvrdila, že to bola nehoda.

Turing venoval pozornosť matematickej logike a teórii rekurzívnych funkcií. V práci *On Computable Numbers (O počítateľných číslach)* vypracoval teóriu algoritmov. Súčasne s E. S. Postom publikoval v roku 1936 teóriu abstraktného počítača, kde vysvetlil funkčné procesy počítačového automatu 1936. V roku 1947 zverejnil prácu *Mysliaci stroj – kacírska teória*, kde uvažoval o učiacom sa stroji a umelej inteligencii. V roku 1950 sa zaoberal biologickými javmi a ich vysvetlením matematickým a algoritmickým popisom.

Zariadenie obsahuje hlavicu a pásku. Hlavica je mechanizmus, ktorý v každom okamihu ukazuje na jedno okienko pásky. Stroj má možnosť posunu o jedno okienko doľava a doprava. V okienkach môžu byť zapísané symboly konečnej abecedy. Páska

prechádza čítacou hlavicou, ktorá priradí riadiacej jednotke pre každý okamih jeden z možných stavov. Jednotka obsahuje program, ktorý určuje podľa konkrétneho stavu nový stav. Takto bol opísaný model abstraktného programovacieho stroja na spracovanie symbolov.

Alan Mathison Turing prispel k riešeniu problémov efektívne vyčísliteľných funkcií, aproximácií Lieových grúp i teórie Riemannovej dzeta funkcie. Spresnil intuitívny pojem algoritmu a rozvinul metódy riešenia algoritmizovateľných problémov. Podieľal sa na realizácii prvého anglického počítača a jeho programového vybavenia. Predpokladal, že stroje môžu imitovať myšlienkové procesy, generovať odpovede mimo rámec ohraničenej množiny možností, prejaviť umelú inteligenciu. Presvedčil seba aj ostatných, že principiálna možnosť riešenia ľubovoľného algoritmizovateľného problému je technicky reálna.

Dušan Jedinák

17 úloh pre rok 2017



Ponúkam jednoduché a možno aj niektoré mierne podnetné úlohy, v ktorých hrá zaujímavú úlohu číslo 2017.

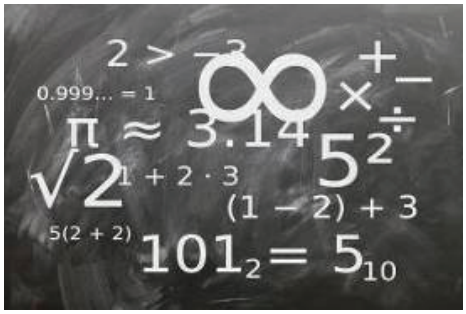
1. Stanovte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím **2 017**.
2. Stanovte, koľko prvočísel menších než **2 017** má ciferný súčet 2.
3. V desiatkovej číselnej sústave stanovte ciferný súčet čísla $10^{\mathbf{2\,017}} + \mathbf{2\,017}$.
4. Stanovte poslednú cifru čísla $\mathbf{2\,017}^{\mathbf{2\,017}} - 17$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.
5. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je **2 017**.
6. Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 123 456 789 101 112 ... 997 998 999. Stanovte, aká číslica je na **2 017.** mieste od začiatku.
7. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\,015}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,016}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,017}\right).$$

8. Stanovte zvyšok po delení čísla $10^{2\,017}$ číslom 15.
9. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla $5^{-2\,017}$.
10. Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2\,015\cdot 2\,016}+\frac{1}{2\,016\cdot 2\,017}.$$

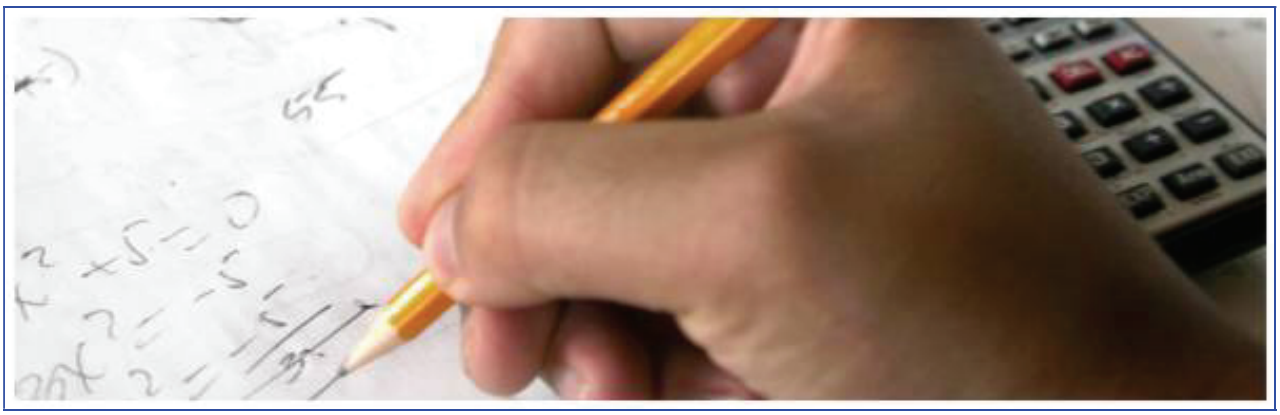
11. Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z **2 017** deviatok (999...999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.
12. V encyklopédii je očíslovaných **2 017** strán (prirodzené čísla do **2 017** vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7.
13. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než $10^{2\,017}$ má ciferný súčet 3.
14. Nájdite všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x\cdot y\cdot z+4=\mathbf{2\,017}$.
15. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x\cdot y\cdot z\cdot t+15=\mathbf{2\,017}$.
16. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do **2 017** (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.



17. Vieme, že $s_n=1-2+3-4+5-6+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n$. Stanovte $s_{2\,016}+s_{\mathbf{2\,017}}$.

Správne odpovede nájdete nielen na 11. strane časopisu, ale aj na webstránke www.era.topindex.sk v časti Testy s matematickou tematikou (17 úloh pre rok 2017).

Dušan Jedinák



Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2017/2018

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Z veľkej kopy kociek Janko postavil kváder. Marienka bola zvedavá, koľko kociek použil na stavbu kvádra a ako kváder vlastne vyzerá, ale Janko jej ho nechcel ukázať. Povedal jej len to, koľko kociek vidno pri pohľade z jednotlivých strán: pri pohľade spredu vidno 270 kociek, pri pohľade zboku vidno 360 kociek, pri pohľade zhora vidno 432 kociek. Marienka na základe toho dokázala určiť rozmery Jankovho kvádra. Určte ich aj vy.

Riešenie: Počet kociek, ktoré vidno z každej strany, predstavuje súčin počtov kociek, ktoré tvoria jeho hrany (ak označíme dĺžky hrán v jednotkových kockách ako a, b, c, potom čísla v zadaní predstavujú súčiny ab, bc, ca – nie nutne v tomto poradí). Ak vynásobíme všetky tri čísla zo zadania, dostaneme druhú mocninu objemu kvádra – súčinu všetkých dĺžok strán – $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$. Odtiaľ už ľahko vypočítame objem kvádra (abc) a potom jeho jednotlivé hrany.

Keďže platí $270 \cdot 360 \cdot 432 = 41\,990\,400 = 6\,480^2$, objem kvádra je 6 480 kociek. Dĺžky jednotlivých hrán potom vypočítame ako podiel objemu kvádra a počtu kociek na jednej stene (napr. $abc : bc = a$):

$$a = 6\,480 : 270 = 24,$$
$$b = 6\,480 : 360 = 18,$$
$$c = 6\,480 : 432 = 15.$$

Dĺžky hrán kvádra sú 15, 18 a 24 kociek.

2. Určte dĺžku a šírku obdĺžnikovej záhrady, ak platia podmienky: Keby šírka zostala taká, aká je, a dĺžka by bola 30 metrov, bol by obsah o 120 m^2 menší než v skutočnosti. Pri nezmenenej šírke a dĺžke 40 metrov by záhrada mala o 80 m^2 väčší obsah, než skutočne má.

Riešenie: Označme si dĺžku záhrady v metroch ako d a šírku ako s (tiež v metroch). Potom podľa zadania platí:

$$s \cdot 30 = s \cdot d - 120,$$
$$s \cdot 40 = s \cdot d + 80.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí $10s = 200$, teda $s = 20$. Dosadením do prvej z predchádzajúcich dvoch rovníc dostaneme, že platí $600 = 20d - 120$, odkiaľ vypočítame, že $d = 36$. Záhrada má dĺžku 36 metrov a šírku 20 metrov.

3. Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych prirodzených čísel menších ako 100. Vieme o nich, že súčet žiadnych dvoch z nich sa nerovná 150. Koľko čísel môže byť napísaných na tabuli?

Riešenie: Na tabuli môžu byť napísané čísla 1 – 50, pretože ak by sme k nim pričítali ľubovoľné iné číslo na tabuli, tak by sme dostali súčet maximálne 149, pretože všetky čísla na tabuli sú menšie ako 100. Týchto čísel je 50. Podobne tam môže byť aj číslo 75, pretože druhýkrát tam už byť napísané nemôže. Uvažujme teraz nasledujúce páry: 51 – 99, 52 – 98, ..., 76 – 74. Z každého páru môže byť na tabuli napísané len jedno číslo, pretože ak by tam bolo aj to druhé, dostali by sme pár so súčtom 150. Týchto párov je 26, takže celkový maximálny počet čísel na tabuli je 77.

4. Z látky tvaru obdĺžnika s rozmermi 110 cm x 80 cm potrebujeme vystrihnúť 30 rovnakých štvorcov. Určte, akú môžu mať najdlhšiu stranu.

Riešenie: Najprv si vypočítame obsah obdĺžnika – je to $110\ \text{cm} \cdot 80\ \text{cm} = 8\,800\ \text{cm}^2$. Ak má byť štvorcov 30, obsah každého z nich bude maximálne $8\,800\ \text{cm}^2 : 30 = 293,\overline{3}\ \text{cm}^2$. Dĺžka jeho strany bude potom maximálne $\sqrt{293,\overline{3}\ \text{cm}^2} \doteq 17,1\,\text{cm}$. Ak by bola dĺžka jeho strany väčšia ako 16 cm, tak v smere kratšej strany obdĺžnika sa zmestia maximálne 4 $(80 : 5 = 16)$ a v smere dlhšej ich bude určite menej ako 7 $(110 : 7 \doteq 15,7 < 16)$, teda dokopy by ich bolo maximálne $4 \cdot 7 = 28$, čo je menej ako 30. Preto dĺžka strany štvorca bude maximálne 16 cm. Pre túto dĺžku už vieme obdĺžnik rozdeliť na 5 x 6 štvorcov s dĺžkou strany 16 cm (a ešte ostane pásik s rozmermi 80 cm x 14 cm). Najdlhšia strana štvorca s požadovanou vlastnosťou je preto 16 cm.

5. V továrni mala každá z troch dielní vyrobiť rovnaký počet výrobkov. Prvá dielňa prekročila plán o 24 %, druhá o 18,5 % a tretej dielni chýbalo do splnenia plánu

15 %. Všetky tri dielne vyrobili spolu 2 620 výrobkov. Koľko výrobkov mala vyrobiť každá dielňa a koľko výrobkov skutočne vyrobila každá dielňa?

Riešenie: Označme plán p. Prvá dielňa vyrobila $1{,}24p$ výrobkov, druhá $1{,}185p$ a tretia $0{,}85p$. Spolu vyrobili $1{,}24p+1{,}185p+0{,}85p=3{,}275p$ výrobkov. Dostávame tak lineárnu rovnicu $3{,}275p=2\,620,$ odkiaľ dostaneme, že $p=800,$ teda každá dielňa mala vyrobiť 800 výrobkov. Na základe údajov v zadaní už ľahko dopočítame, že prvá dielňa vyrobila $1{,}24\cdot 800=992$ výrobkov, druhá dielňa vyrobila $1{,}185\cdot 800=948$ výrobkov a tretia dielňa vyrobila $0{,}85\cdot 800=680$ výrobkov.

6. Peter si chcel urobiť výlet na bicykli. Našiel trasu dlhú 30 km. Keby vedel ísť v priemere o 5 km/h rýchlejšie, zvládol by túto trasu o 18 minút skôr. Aká bola jeho priemerná rýchlosť počas výletu na bicykli?

Riešenie: Ak označíme v rýchlosť Petra v kilometroch za hodinu, prešiel by trasu za $\frac{30}{v}$ hodín, ak by sa pohyboval o 5 km/h rýchlejšie, prešiel by trasu za $\frac{30}{v+5}$ hodín. Zo zadania vieme, že platí $\frac{30}{v}-\frac{30}{v+5}=\frac{18}{60}$. Túto rovnicu vyriešime prenásobením menovateľmi a úpravou na kvadratickú rovnicu:

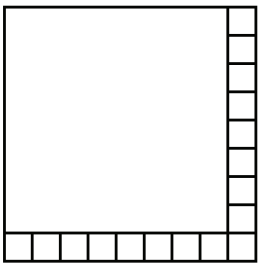
$$\begin{aligned} 30\cdot(v+5)-30\cdot v &= 0{,}3\cdot v\cdot(v+5),\\ 0 &= 0{,}3v^2+1{,}5v-150,\\ v_{1,2} &= \frac{-1{,}5\pm\sqrt{1{,}5^2-4\cdot 0{,}3\cdot(-150)}}{2\cdot 0{,}3},\\ v_1 &= 20,\\ v_2 &= -25. \end{aligned}$$

Záporný koreň nám nevyhovuje, preto bola rýchlosť Petra 20 km/h.

7. Štvorec S je rozdelený na 18 menších štvorcov, z ktorých 17 má stranu dĺžky 1. Aký obsah má štvorec S?

Riešenie: 18. štvorec, ktorý tvorí so 17 jednotkovými štvorcami štvorec S, musí mať celočíselnú dĺžku strany, pretože inak by nemohol spolu s jednotkovými štvorcami vyplniť iný štvorec – jednotkové štvorce sa musia úplne dotýkať aspoň jednej jeho

strany. Ak označíme dĺžku jeho strany ako a, tak potom musia byť čísla a^2 aj a^2-17 druhými mocninami prirodzených čísel. Keďže $9^2-8^2=17,$ nemôže byť dĺžka strany štvorca S väčšia ako 9. Zároveň sme našli prvé riešenie – štvorec S má obsah 81 a je rozdelený na jeden štvorec s obsahom 64 a 17 jednotkových štvorcov okolo dvoch jeho strán.



Ak by boli jednotkové štvorce okolo celého 18. štvorca, bol by ich počet párny (štvornásobok počtu pri jednej strane plus štvornásobok pri vrcholoch), a teda by nemohol byť 17. Ak by boli pri 18. štvorci dva rady jednotkových štvorcov tak ako na obrázku, bol by ich počet párny. Ak by boli tri a viac, tak ich počet bude deliteľný týmto číslom, avšak 17 je prvočíslo, takže žiadna ďalšia možnosť už neexistuje.

Štvorec S má obsah 81.

8. Pre korene $x_1,\ x_2$ kvadratickej rovnice $x^2-3ax+a^2=0$ platí $x_1^2+x_2^2=1,75.$ Určte a.

Riešenie: Na základe Viètových vzťahov vieme, že platí

$$x_1+x_2=3a,$$
$$x_1x_2=a^2.$$

Na základe vzťahu zo zadania po úprave dostaneme, že platí:

$$1,75=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(3a\right)^2-2a^2=7a^2,$$
$$0,25=a^2.$$

$$1,75=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(3a\right)^2-2a^2=7a^2,$$
$$0,25=a^2,$$
$$0,5=\left|a\right|.$$

Po odmocnení dostaneme, že úloha má dve riešenia: $a_1=0,5$ a $a_2=-0,5.$ Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe riešenia vyhovujú.

9. Dokážte, že z každej desaťprvkovej množiny dvojciferných čísel vieme vybrať také dve jej neprázdne disjunktné podmnožiny, že súčet ich prvkov bude rovnaký.

Riešenie: Najprv si uvedomme, že požiadavka na disjunktnosť množín nie je podstatná, pretože ak majú dve disjunktné množiny rovnaký súčet prvkov, tak ak do

oboch pridáme nejaké ďalšie číslo, súčet prvkov bude v oboch množinách opäť rovnaký. A naopak, ak majú dve rôzne množiny rovnaký súčet prvkov, tak ak z nich odstránime spoločné prvky, tak dostaneme dve neprázdne množiny s rovnakým súčtom prvkov. Ak máme 10 prvkov, tak počet rôznych neprázdnych podmnožín, ktoré z nich vieme vytvoriť, je $2^{10}-1=1\,023$. Súčty v týchto množinách môžu nadobúdať hodnoty od 10 (najmenšie dvojciferné číslo tvoriace jednoprvkovú množinu) po 945 (množina obsahujúca 10 najväčších dvojciferných čísel 90 – 99). To znamená, že máme maximálne 936 rôznych súčtov prvkov množín. Na základe Dirichletovho princípu potom existujú dve rôzne podmnožiny, ktoré majú rovnaký súčet prvkov. Ak z týchto množín odstránime spoločné prvky, dostaneme dve disjunktné podmnožiny s požadovanou vlastnosťou (odstránením spoločných prvkov nedostaneme prázdnu množinu, pretože tieto dve množiny nie sú totožné), čo sme chceli dokázať.

10. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existujú prvočísla p a q také, že n delí ich rozdiel.

Riešenie: Uvažujme postupnosť prirodzených čísel $1+n$, $1+2n$, …, $1+rn$, … V tejto postupnosti sa nachádza nekonečne veľa prvočísel. Toto tvrdenie dokážeme sporom: Ak by ich bolo konečne veľa, tak za r by sme zvolili ich súčin a číslo $1+rn$ by nebolo deliteľné ani jedným z nich, teda by bolo prvočíslom väčším ako r, čo by bol spor s predpokladom). Označme si ľubovoľné dve rôzne z týchto prvočísel ako p a q. Potom ich rozdiel bude deliteľný číslom n (existujú také prirodzené čísla a a b, že platí $p=1+an$, $q=1+bn$, a teda $p-q=n\cdot(a-b)$, teda n delí ich rozdiel).

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Šesť chlapcov bolo na brigáde. Peter a Pavol zarobili spolu 1 100 €, Pavol a Jozef 1 700 €, Jozef a Michal 1 100 €, Michal a Ján 3 300 €, Ján a Fero 5 300 €, Fero a Pavol zarobili 3 200 €. Koľko zarobil ktorý chlapec na brigáde?

2. Za jednotlivé písmená dosaďte číslice 0 až 9 tak, aby platilo nasledujúce sčítanie (za rôzne písmená rôzne číslice):

```
  TWENTY
  TWENTY
  TWENTY
     TEN
     TEN
------
  EIGHTY
```

3. Piati kamaráti, A, B, C, D a E, majú taký zvyk, že denne striedajú kravaty. Vždy si zoberú tú, ktorú najdlhšie nemali. Každý z nich má aspoň dve kravaty, pričom ani jeden z nich ich nemá viac ako 11. Žiadny z nich nemá dve kravaty rovnakej farby, žiadni dvaja nevlastnia rovnaký počet kravát. Uvádzané údaje sú z predchádzajúceho roka:

- 1. decembra mal A modrú, B a C červenú, D zelenú, E žltú kravatu.
- 19. decembra mal D zelenú, E žltú, C modrú, ostatní dvaja červenú kravatu.
- 23. decembra mal D bielu, 26. decembra žltú kravatu.
- 11. decembra nosili kravaty vo farbách: žltá, červená, modrá, zelená a biela.
- 31. decembra mal každý na sebe rovnakú kravatu ako 1. decembra.

Akú kravatu mal na sebe B 1. januára tohto roku?

4. Nájdite všetky sedemciferné čísla zostavené z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať s touto podmienkou: ak označíme zľava cifry postupne A, B, C, D, E, F, G, tak platí: $A - B = C$, $B - C = D$, $C - D = E$, $D - E = F$, $E - F = G$.

5. Súčet cifier trojciferného prirodzeného čísla x označíme y. Určte hodnotu x, ak viete, že $x + y$ a $x - y$ sú také prirodzené čísla, ktorých všetky cifry sú rovnaké.

6. Vlak prešiel vzdialenosť z mesta A do mesta B priemernou rýchlosťou 56 km/h. Po 90 minútach cesty touto rýchlosťou zo stanice A vlak pol hodiny stál. Aby sa podľa stanoveného času dostal do stanice B, musel prejsť zvyšnú vzdialenosť priemernou rýchlosťou 63 km/h. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

7. Nájdite všetky riešenia nasledujúcej rovnice:

$$\frac{x+11}{2013}+\frac{x+9}{2015}+\frac{x+7}{2017}=\frac{x+2017}{7}+\frac{x+2015}{9}+\frac{x+2013}{11}$$

8. Dĺžka odvesny pravouhlého trojuholníka je 3 cm, polomer v písanej kružnice je 1 cm. Vypočítajte jeho obsah.

9. Daná je množina *A* všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 18 zvyšok 2, a množina *B* všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 19 zvyšok 1. Určte počet všetkých prirodzených čísel, ktoré patria do prieniku týchto dvoch množím a sú menšie ako 100 000.

10. Nech *x* a *y* sú reálne čísla väčšie ako 1. Nech *a* označuje logaritmus *x* pri základe *y* a *b* označuje logaritmus *y* pri základe *x*. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a + b$.

11. Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná tak, že pre jej členy platí $F_0 = F_1 = 1$ a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pre všetky prirodzené čísla *n*. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *k* existuje člen tento postupnosti, ktorý končí aspoň *k* nulami.

12. Nech *a*, *b*, *c* sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré je $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *n* platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 26. 2. 2018

Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
M. R. Štefánika 716/29
900 46 Most pri Bratislave

Riešenia 17 úloh pre rok 2017

1. Stanovte počet prirodzených čísel od 1 do 10^6, ktoré končia štvorčíslím **2 017**.

Riešenie: Ide o čísla tvaru XY2 017, pričom X a Y sú cifry 0 až 9. Takýchto čísel je $10 \cdot 10 = 100$.

2. Stanovte, koľko prvočísel menších než **2 017** má ciferný súčet 2.

Riešenie: Ide o prvočísla 2, 11 a 101, teda sú 3 (čísla 20, 200 a 2 000 sú deliteľné 10, teda nie sú prvočísla, podobne overíme zvyšné čísla obsahujúce dve jednotky).

3. V desiatkovej číselnej sústave stanovte ciferný súčet čísla $10^{\mathbf{2\,017}} + \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Uvedený súčet bude mať dekadický zápis 100...002017, teda ciferný súčet bude 1 + 2 + 1 + 7 = 11.

4. Stanovte poslednú cifru čísla $\mathbf{2\,017}^{\mathbf{2\,017}} - 17$ vyjadreného v desiatkovej číselnej sústave.

Riešenie: Posledná cifra mocniny prirodzeného čísla závisí len od poslednej cifry tohto prirodzeného čísla, podobne posledná cifra rozdielu dvoch prirodzených čísel závisí od posledných cifier týchto dvoch čísel. Preto stačí hľadať poslednú cifru čísla $7^{2\,017} - 7$. Keďže platí $7^4 = 2\,401$, poslednou cifrou čísla $7^{2\,016} = \left(7^4\right)^{504} = 2\,401^{504}$ bude cifra 1, a teda poslednou cifrou čísla $7^{2\,017} = 7 \cdot 7^{2\,016}$ bude cifra 7, a teda poslednou cifrou čísla $7^{2\,017} - 7$ bude cifra 0.

5. Stanovte prvú číslicu najmenšieho prirodzeného čísla, ktorého súčet číslic je **2 017**.

Riešenie: Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať čo najmenej cifier (pričom žiadnu nulovú, keďže tie neovplyvňujú ciferný súčet) a medzi nimi čo najviac číslic 9 na konci čísla. Pretože 2 017 = 224 · 9 + 1, hľadané číslo je 199.....9 (jednotka a za ňou 224-krát číslica 9), a teda hľadanou číslicou je číslica 1.

6. Zapíšme za sebou čísla od 1 do 999: 123 456 789 101 112 ... 997 998 999. Stanovte, aká číslica je na **2 017.** mieste od začiatku.

Riešenie: Jednociferných čísel je 9. Zaberajú 9 miest. Dvojciferných čísel je 90 (od 10 do 99). Zaberajú 180 miest. Trojciferných čísel je 900 (od 100 do 999). Zaberajú 2 700 miest. Hľadané 2 017. miesto je 1 828. miesto medzi trojciferným číslami (1 828 = 2017 – 189). Na 1 828 miest sa zmestí 1828 : 3 = 609 úplných trojciferných čísel a ešte jedna cifra. 609. trojica cifier v postupnosti 100 101 102... je trojica 708 (lebo 100 je prvá trojica, 101 je druhá trojica, a teda 708 je 609. trojica), teda číslica na 2 017. mieste je 7 (7 je prvá cifra z nasledujúceho čísla 709).

7. Stanovte hodnotu výrazu

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\,015}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,016}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\,017}\right).$$

Riešenie: Jednotlivé časti výrazu možno upraviť vykrátiť na tvar:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2\,017}{2\,016}\cdot\frac{2\,018}{2\,017}=\frac{2\,018}{2}=1\,009.$$

8. Stanovte zvyšok po delení čísla $10^{\mathbf{2\,017}}$ číslom 15.

Riešenie: Matematickou indukciou dokážeme, že 10^n dáva po delení číslom 15 zvyšok 10 pre všetky prirodzené čísla n. Pre $n=1$ tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké n. Potom platí $10^{n+1}=10\cdot10^n\equiv10\cdot10=$ $=100\equiv10\,(\mathrm{mod}\,15),$ čo sme chceli dokázať.

9. Stanovte poslednú cifru desatinného rozvoja čísla $5^{\mathbf{-2\,017}}$.

Riešenie: Keďže platí $2^{2\,017}=5^{-2\,017}\cdot10^{2\,017}$, stačí nám určiť poslednú cifru čísla $2^{2\,017}$, pretože násobením mocninou desiatky len posúvame desatinnú čiarku. Keďže platí $2^5=32,$ platí aj

$$2^{2\,017}=2^2\cdot2^{2\,015}=2^2\cdot\left(2^5\right)^{403}=2\cdot32^{504}\equiv2^2\cdot2^{504}=2^{505}=\left(2^5\right)^{101}\equiv2^{101}=2\cdot2^{100}=$$
$$=2\cdot\left(2^5\right)^{20}=2\cdot32^{20}\equiv2\cdot2^{20}=2\cdot\left(2^5\right)^4=2\cdot32^4\equiv2\cdot2^4=32\equiv2\,(\mathrm{mod}\,10),$$

teda hľadanou poslednou cifrou desatinného rozvoja čísla $5^{-2\,017}$ je cifra 2.

10. Stanovte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2\,015\cdot2\,016}+\frac{1}{2\,016\cdot2\,017}.$$

Riešenie: Jednotlivé časti výrazu možno upraviť takto:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,015}-\frac{1}{2\,016}\right)+\left(\frac{1}{2\,016}-\frac{1}{2\,017}\right)=1-\frac{1}{2\,017}=\frac{2\,016}{2\,017},$$

pretože ostatné zlomky sa postupne odčítajú.

11. Zápis čísla K v desiatkovej sústave sa skladá z **2 017** deviatok (999...999). Stanovte, koľko deviatok obsahuje desiatkový zápis čísla K^2.

Riešenie: Číslo K môžeme zapísať aj ako $10^{2\,017}-1$. Potom $K^2=\left(10^{2\,017}-1\right)^2=$ $=10^{4\,034}-2\cdot10^{2\,017}+1$. Toto číslo vyzerá tak, že má na začiatku 2 016 deviatok, potom nasleduje 8, potom 2 016 núl a na konci jednotka, teda deviatok tam je 2 016.

12. V encyklopédii je očíslovaných **2 017** strán (prirodzené čísla do **2 017** vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7.

Riešenie: Sedmička sa môže vyskytnúť len na mieste jednotiek, desiatok a stoviek, môže byť jedna, dve alebo tri. Najprv sa zaoberajme číslami väčšími ako 1 999 – z nich obsahujú sedmičku len dve – 2 007 a 2 017. Teraz sa zameriame na čísla menšie ako 2 000. Ak je jedna na mieste jednotiek, tak ide o čísla tvaru XYZ7, pričom X je 0 alebo 1, Y, Z sú cifry 0 až 9 rôzne od 7. Ľubovoľnej ich kombinácii zodpovedá vyhovujúce číslo, takže ich je $2\cdot9\cdot9=162$. Podobne čísel tvaru XY7Z aj X7YZ je 162. Ak sú tam sedmičky dve, ide o čísla typu XY77, X7Y7 a X77Y, pričom X je 0 alebo 1, Y je cifra 0 až 9 rôzna od 7. Každého typu ich je tam $2\cdot9=18,$ avšak každý z nich obsahuje sedmičky dve. Ešte nám zostali tri sedmičky – tam sú len dve možnosti – 777 a 1 777. Dokopy sme použili číslicu sedem $2+3\cdot162+2\cdot3\cdot18+3\cdot2=602$-krát.

13. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších než $10^{\mathbf{2\,017}}$ má ciferný súčet 3.

Riešenie: Každé prirodzené číslo menšie než $10^{2\,017}$ má najviac 2 017 cifier. Ciferný súčet 3 môžeme dostať tromi spôsobmi: 3, 1 + 2 a 1 + 1 + 1 (plus ľubovoľný počet nulových cifier). Vyhovujúcich čísel s práve jednou nenulovou číslicou 3 je 2 017 (sú to 3, 30, 300, ..., $3\cdot10^{2\,016}$). Ak tam bude dvojica nenulových cifier 1 a 2, možností je 2 017 · 2 016 = 4 066 272 – najprv vyberieme jedno miesto z 2 017, kam umiestnime cifru 1, a potom jedno miesto zo zvyšných 2 016 miest, kam umiestnime cifru 2 (zvyšok doplníme nulami). Ak tam budú práve tri jednotky, bude ich

$(2\,017 \cdot 2\,016 \cdot 2\,015)/6 = 1\,365\,589\,680$ (na výber umiestnenia prvej jednotky máme 2 017 miest, pre druhú 2 016 a pre tretiu 2 015 miest, avšak jednotky sú rovnaké, takže každú možnosť sme započítali $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$-krát).

Spolu všetkých požadovaných možností teda je

$$2\,017 + 4\,066\,272 + 1\,365\,589\,680 = 1\,369\,657\,969.$$

14. Nájdite všetky rôzne trojice prirodzených čísel $x < y < z$, ktoré sú riešením rovnice $x \cdot y \cdot z + 4 = \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Pretože $2017 - 4 = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, hľadané čísla x, y, z budú mať len tieto vyššie uvedené prvočíselné delitele (prípadne 1). Ak zvolíme $x = 1$, y a z už musia byť väčšie ako 1, teda jedno z nich bude 3, 11 alebo 61 a druhé bude súčinom zvyšných dvoch prvočísel. Ak zvolíme $x = 3$, tak nutne $y = 11$ a $z = 61$ vzhľadom na usporiadanie čísel. Sú teda spolu štyri trojice prirodzených čísel pre požadované riešenie úlohy: 1, 3, 671; 1, 11, 183; 1, 33, 61; 3, 11, 61.

15. Stanovte, koľko rôznych štvoríc prirodzených čísel $x < y < z < t$ je riešením rovnice $x \cdot y \cdot z \cdot t + 15 = \mathbf{2\,017}$.

Riešenie: Analogicky ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme, že musí platiť $x \cdot y \cdot z \cdot t = 2\,002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ak zvolíme $x = 1$, zostali nám 4 prvočísla. Keďže z nich máme vytvoriť tri čísla, jedno sa bude rovnať súčinu niektorých dvoch prvočísel a zvyšné dve sa budú rovnať zvyšným dvom prvočíslam (budú určené jednoznačne vzhľadom na podmienku usporiadania zo zadania). Vyberáme teda dve čísla zo štyroch, čo vieme urobiť 6 spôsobmi (kombinácie bez opakovania). Ak zvolíme $x = 2$, tak ďalšie čísla budú $y = 7$, $z = 11$ a $t = 13$, teda je to siedma možnosť. Ďalšie možnosti už nevyhovujú vzhľadom na usporiadanie čísel. Spomínanej úlohe vyhovuje sedem možností pre požadované usporiadané štvorice.

16. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do **2 017** (vrátane). Ak najprv označíme z nich všetky, ktoré sú deliteľné dvomi, potom inou značkou označíme všetky čísla deliteľné tromi a na záver označíme zase inou značkou všetky čísla deliteľné štyrmi, stanovte, koľko z čísel na tabuli bude potom označených práve dvomi značkami.

Riešenie: Keďže číslo deliteľné štyrmi je deliteľné aj dvomi, každé číslo deliteľné štyrmi bude mať aspoň dve značky. Potom číslo, ktoré má práve dve značky a je

deliteľné štyrmi, nesmie byť nedeliteľné tromi (teda dvanástimi). Keďže $2\,017 : 4 = 504$ zv. 1, čísel deliteľných štyrmi je 504. Keďže $2\,017 : 12 = 168$ zv. 1, čísel deliteľných dvanástimi je 168, a teda vyhovujúcich čísel tohto typu je 504 – 168 = 336. Ak číslo nie je deliteľné štyrmi a má dve značky, musí byť deliteľné dvomi a súčasne tromi, teda šiestimi (ale nie je deliteľné štyrmi, teda nie je deliteľné dvanástimi). Keďže $2\,017 : 6 = 336$ zv. 1, čísel deliteľných šiestimi je 336. Čísel deliteľných dvanástimi je 168, a teda vyhovujúcich čísel tohto typu je 336 – 168 = 168. Dokopy teda dostávame 336 + 168 = 504 čísel s práve dvoma značkami.

17. Vieme, že $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n$. Stanovte $s_{2\,016} + s_{2\,017}$.

Riešenie: Ľahko nahliadneme, že $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 2$, $s_4 = -2$, $s_5 = 3$, $s_6 = -3$, ..., $s_{2k-1} = k$ a $s_{2k} = -k$ pre k z množiny prirodzených čísel (tvrdenie ľahko dokážeme matematickou indukciou). Teda $s_{2\,016} = s_{2 \cdot 1\,008} = -1\,008$ a $s_{2\,017} = s_{2 \cdot 1\,009 - 1} = 1\,009$, teda $s_{2\,016} + s_{2\,017} = -1\,008 + 1\,009 = 1$.

Dušan Jedinák, Martin Hriňák

Matematické úlohy s lichobežníkom

1. Stanovte obsah rovnoramenného lichobežníka, ak sú jeho uhlopriečky na seba kolmé a výška lichobežníka má veľkosť 8 cm.

2. Vypočítajte obvod lichobežníka *ABCD*, ak mu možno vpísať kružnicu a stredná priečka tohto lichobežníka má dĺžku 1 meter.

3. Ak si v ľubovoľnom lichobežníku *ABCD* označíme stred ramena *BC* ako bod *S*, potom dokážte, že obsah trojuholníka *ASD* sa rovná polovici obsahu lichobežníka *ABCD*.

4. Dokážte, že v každom lichobežníku stredy jeho uhlopriečok a stredy jeho ramien ležia na jednej priamke.

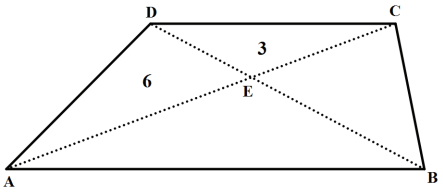
5. Dokážte, že ak niektorá stredná priečka konvexného štvoruholníka s nezhodnými stranami ho rozdelí na dve časti s rovnakým obsahom, tak tento štvoruholník je lichobežník.

6. Zostrojte lichobežník *ABCD*, v ktorom je priamka *AB* rovnobežná s priamkou *CD*, jeho uhlopriečky zvierajú pravý uhol, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm a priesečník uhlopriečok od strany *AB* vzdialenosť 3 cm.

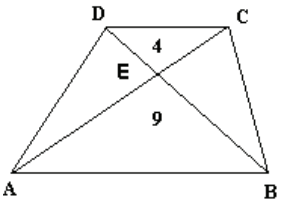
7. Zostrojte rovnoramenný lichobežník *ABCD* s dlhšou základňou *CD* s dĺžkou 10 cm, ak viete, že ho možno rozdeliť dvoma priamkami prechádzajúcimi bodom *A* na tri rovnoramenné trojuholníky, z ktorých jeden je trojuholník *ABC*.

8. Vypočítajte obsah lichobežníka *ABCD*, ak čísla v obrázkoch znamenajú obsah príslušných trojuholníkov:

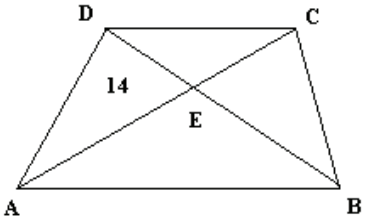
a)



b)



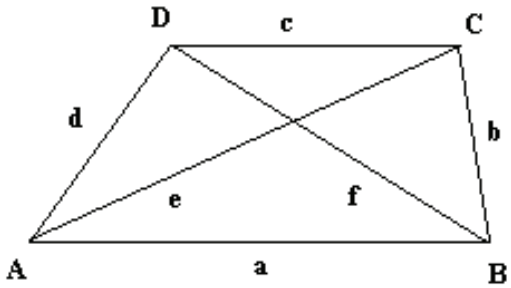
c) $|AE| = 2 \cdot |EC|$



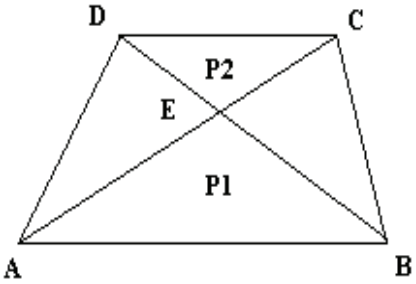
9. Vypočítajte obsah lichobežníka *ABCD*, ak sú dané veľkosti $|AB| = 24$ cm, $|BC| = 16$ cm, $|AC| = 22$ cm, $|BD| = 26$ cm.

10. V lichobežníku *ABCD* so základňami *AB*, *CD* platí: $|CD| = |AD| + |BC|$. Dokážte, že potom osi uhlov *DAB* a *CBA* sa pretínajú na strane *CD*.

11. Dokážte, že pre lichobežník *ABCD*, kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ sú veľkosti jeho strán a uhlopriečok (pozri obrázok) platí: $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.

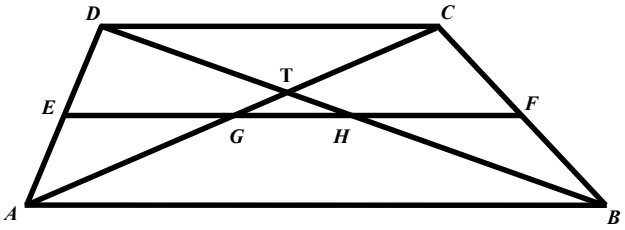


12. Dokážte, že ak v lichobežníku *ABCD*, kde *E* je priesečník jeho uhlopriečok, platí, že obsah trojuholníka *ABE* je P_1 a obsah trojuholníka *DCE* je P_2, tak pre obsah lichobežníka *ABCD* platí $S = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.



13. Rovnoramenný lichobežník *ABCD* so základňami *AB*, *CD* má vpísanú kružnicu so stredom *O*. Stanovte obsah tohto lichobežníka, ak sú dané dĺžky úsečiek *OB* a *OC*.

14. V lichobežníku *ABCD*, v ktorom jeho uhlopriečky *AC*, *BD* rozdeľujú jeho strednú priečku *EF* na tri zhodné úsečky *EG*, *GH*, *HF*, dokážte, že platí $|AB| = 2 \cdot |CD|$.



15. Dokážte, že každému rovnoramennému lichobežníku možno opísať kružnicu.

16. Je daný lichobežník *ABCD*. Nech $M \in \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ a $N \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Dokážte, že *M*, *N* a stredy oboch základní ležia na jednej priamke.

17. V rovnoramennom lichobežníku má uhlopriečka veľkosť 16 cm a zviera so základňou lichobežníka uhol 45°. Stanovte obsah lichobežníka.

18. Odvoďte vzťah pre výpočet obsahu rovnoramenného lichobežníka, ak poznáme veľkosť uhlopriečky a jej odchýlku od základne.

19. V lichobežníku *ABCD* platí: $|AD| = |DC| = |CB| = m$ a $|AB| = |AC| = z$. Stanovte vnútorný uhol tohto lichobežníka pri vrchole *D*.

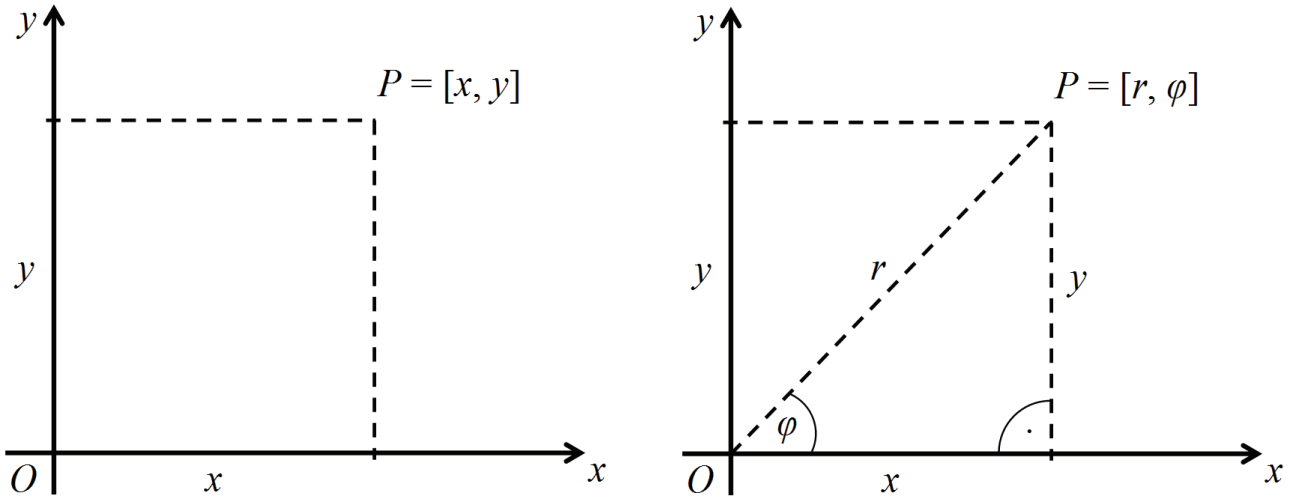
Dušan Jedinák

Kružnice, špirály a ruže v polárnych súradniciach

V tomto článku si ukážeme niekoľko zaujímavých kriviek vyjadrených v polárnych súradniciach, ktoré si môžete nakresliť aj vy na počítači. Najprv si vysvetlíme, čo sú to polárne súradnice.

Polárne súradnice

Klasické súradnice, s ktorými ste sa pravdepodobne už stretli, sa nazývajú karteziánske. Napríklad bod P na obrázku dole má súradnice $[x, y]$. To znamená, že keby sme sa chceli dostať z bodu O (tzv. začiatku súradnicovej sústavy) do bodu P len v smere súradnicových osí, museli by sme prejsť vzdialenosť x doprava (v smere osi x) a potom vzdialenosť y hore (v smere osi y). Samozrejme, rýchlejšie by sme sa tam dostali, keby sme šli z bodu O do bodu P priamo. Na to by sme ale museli poznať vzdialenosť, ktorú treba prejsť, a smer, ktorým treba ísť. Inak povedané, museli by sme poznať tzv. polárne súradnice bodu P. Zvykneme ich označovať $[r, \varphi]$, pričom r je vzdialenosť bodu P od začiatku súradnicovej sústavy a φ je uhol, ktorý zviera polpriamka $\overrightarrow{OP}$ s kladnou polosou x.

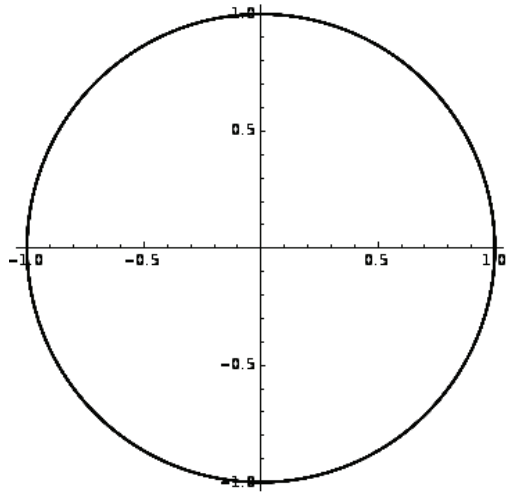


Ako vypočítame polárne súradnice bodu, ak poznáme len jeho karteziánske súradnice? Keďže poznáme dĺžky dvoch odvesien pravouhlého trojuholníka, dĺžku prepony $r = |OP|$ vypočítame pomocou Pytagorovej vety: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vieme, že tangens uhla φ je pomer dĺžky protiľahlej odvesny k dĺžke priľahlej odvesny, t. j. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Z toho dostaneme, že platí $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

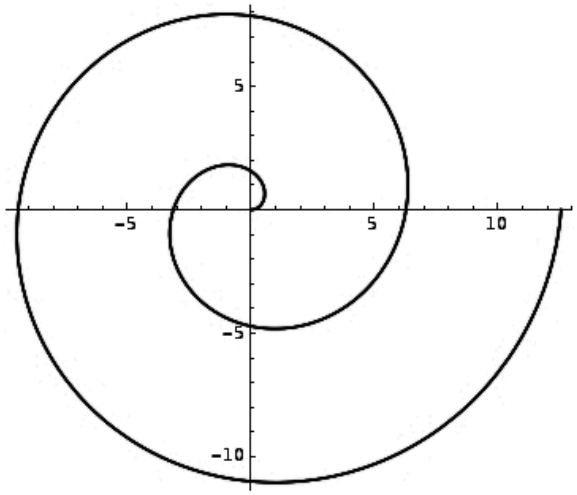
Kružnice a špirály v polárnych súradniciach

Keď už sme sa zoznámili s polárnymi súradnicami, ukážeme si grafy niektorých funkcií vyjadrených v polárnych súradniciach. Pôjde o funkcie v tvare $r = f(\varphi)$, kde f je funkcia premennej φ. Najjednoduchšia funkcia je konštantná funkcia, napríklad $r = 1$. Vzdialenosť ľubovoľného bodu grafu od začiatku súradnicovej sústavy nezávisí od uhla φ, je stále rovnaká, teda graf tejto funkcie je kružnica s polomerom 1 so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

Ďalšou funkciou, na ktorú sa pozrieme, je lineárna funkcia. Jej najjednoduchšia podoba je $r = \varphi$. Vzdialenosť bodu grafu od začiatku súradnicovej sústavy narastá rovnomerne so zväčšujúcim sa uhlom φ. Dostaneme tzv. Archimedovu špirálu.

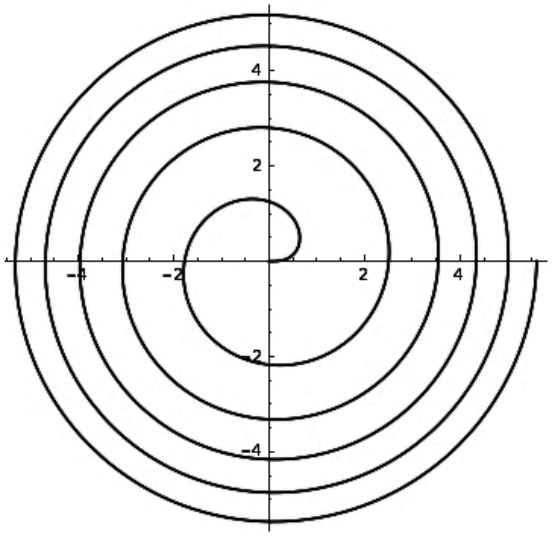


Kružnica, $r = 1$

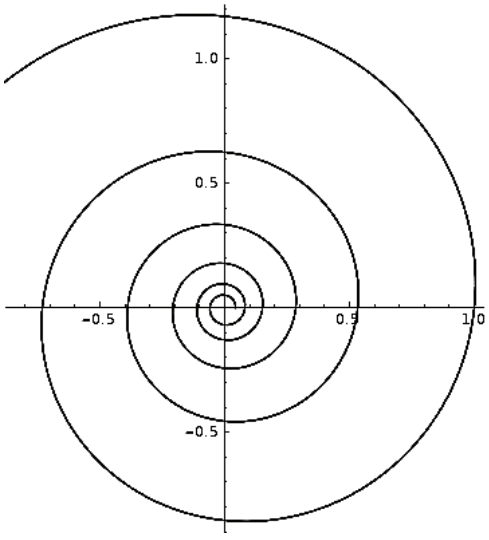


Archimedova špirála $r = \varphi,\ \varphi \in \langle 0; 4\pi \rangle$

Ďalšie špirály, ktoré môžeme získať pomocou jednoduchého funkčného predpisu, sú napríklad Fermatova a logaritmická špirála:



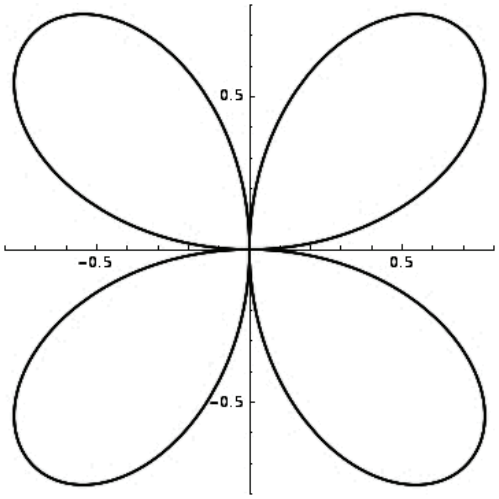
Fermatova špirála $r = \sqrt{\varphi},\ \varphi \in \langle 0; 10\pi \rangle$



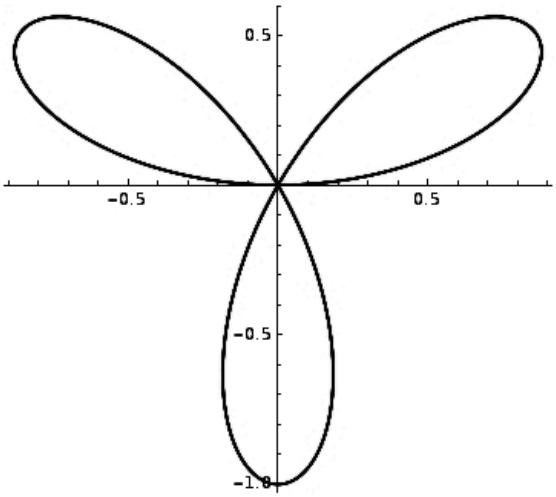
Logaritmická špirála $r = e^{0,1\varphi},\ \varphi \in \langle -10\pi; \pi \rangle$

Rhodonea (tzv. ruža)

Ďalšou zaujímavou krivkou, ktorá sa dá jednoducho vyjadriť v polárnych súradniciach, je tzv. rhodonea. *Rhodon* je slovo gréckeho pôvodu a znamená ruža. Názov tejto krivke dal niekedy medzi rokmi 1723 až 1728 Guido Grandi, taliansky matematik, kňaz a filozof pôsobiaci na univerzite v Pise. Graf tejto funkcie skutočne pripomína kvet. Ide o sínusoidu v polárnych súradniciach, teda o funkciu $r = \sin(n\varphi)$, kde n môže byť ľubovoľné reálne číslo. Na obrázkoch nižšie sú grafy týchto funkcií pre rôzne hodnoty parametra n. Takéto obrázky si môžete nakresliť aj vy na počítači, napr. na stránke www.wolframalpha.com. Do prázdneho okienka zadajte funkciu, napr. „r = sin((2/5)phi)“, stlačte enter a dostanete graf tejto funkcie (tzv. Polar plot).

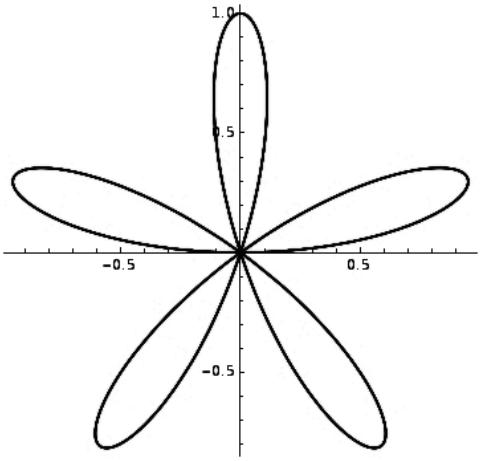


Quadrifolium $r = \sin(2\varphi)$

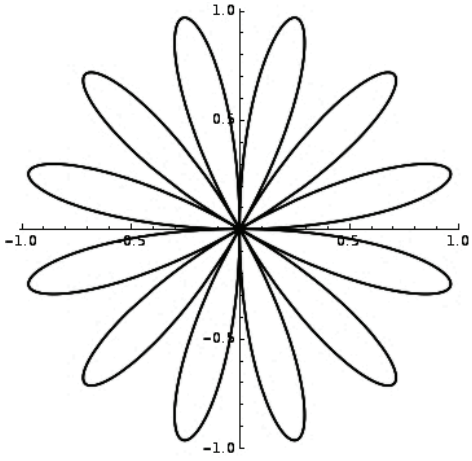


Trifolium $r = \sin(3\varphi)$

Ak je n celé číslo, tak počet lupeňov (resp. okvetných lístkov) je n, ak je n nepárne, alebo je to $2n$, ak je n párne. Jednotlivé lupene sa neprekrývajú.

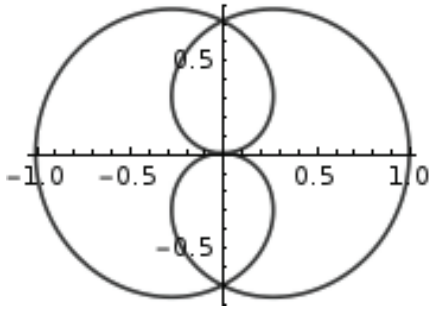


$r = \sin(5\varphi)$

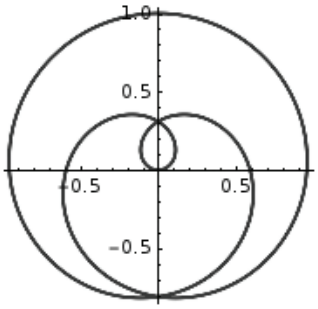


$r = \sin(6\varphi)$

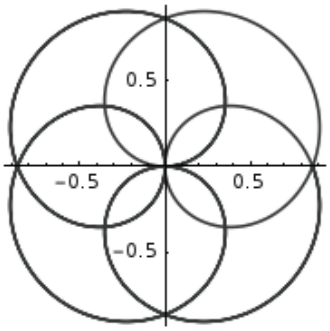
Ak je n racionálne číslo, tak krivka je uzavretá, má konečnú dĺžku a skladá sa z konečného počtu lupeňov. Ak je n racionálne, ale nie celé číslo, jednotlivé lupene sa prekrývajú. Trochu si zaexperimentujte a pokúste sa zistiť, ako závisí počet lupeňov od čísla n.



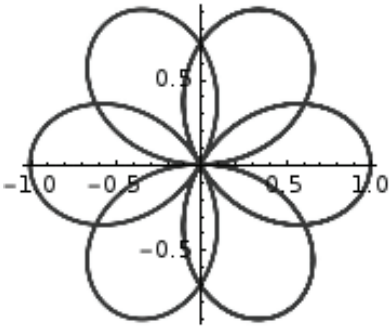
$$r = \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$$



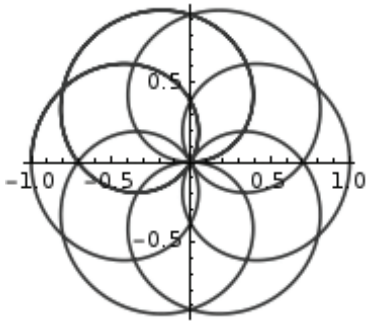
$$r = \sin\left(\frac{1}{5}\varphi\right)$$



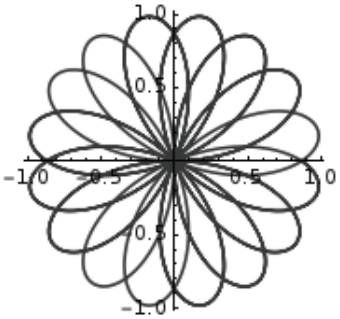
$$r = \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right)$$



$$r = \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right)$$



$$r = \sin\left(\frac{3}{4}\varphi\right)$$



$$r = \sin\left(\frac{8}{3}\varphi\right)$$

Čo sa stane, ak n nie je racionálne? Dá sa ukázať, že vtedy bude mať krivka nekonečnú dĺžku a bude tvoriť tzv. hustú množinu – nebude síce prechádzať každým bodom kruhu s polomerom 1 so stredom v začiatku súradnicovej sústavy, ale ku každému bodu v tomto kruhu bude ľubovoľne blízko. Ak by sa nám podarilo nakresliť graf takej funkcie pre hodnoty φ od 0 do nekonečna, vyzeralo by to, ako keby tá krivka vyplnila celý kruh.

Katarína Hriňáková

Obsah

Redakčná pošta ..... 2. strana obálky
Alan Turing 1
17 úloh pre rok 2017 2
Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2017/2018 4
Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže..... 4
Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže 8
Riešenia 17 úloh pre rok 2017..... 11
Matematické úlohy s lichobežníkom..... 15
Kružnice, špirály a ruže v polárnych súradniciach 18

MATMIX – matematický časopis pre žiakov základných a stredných škôl, vydáva Ing. Mgr. Martin Hriňák v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Bratislava 1, a APROMOD, s. r. o., ako pomocnú literatúru pre predmetové komisie matematiky a pre žiakov so záujmom o matematiku.

Vydávanie časopisu je spolufinancované z dotácie Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky.

Šéfredaktor: Ing. Mgr. Martin Hriňák
Redakcia: Dušan Jedinák, Mgr. Katarína Hriňáková, PhD.
Vydavateľ: Ing. Mgr. Martin Hriňák, Havanská 17, 040 13 Košice, IČO 41857836
Distribúcia: APROMOD, s. r. o., Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Adresa redakcie: Ing. Mgr. Martin Hriňák, MATMIX, Bratislavská 716/2, 900 46 Most pri Bratislave
Časopis vychádza štyrikrát ročne. Cena 1,35 €. Náklad: 150 ks. December 2017.
E-mail: matmix@matmix.sk
Webová stránka: http://www.matmix.sk
Registračné číslo MK SR: EV 2029/08
ISSN: 1336-7854

