14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$\left(2n^2+3n+1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Riešenie: Vieme, že platí $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$. Predelením oboch strán rovnosti kladným číslom n a použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame, že platí:

$$\frac{2n^2+3n+1}{6}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}\geq \sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^2}=\sqrt[n]{\left(n!\right)^2}.$$

Umocnením na n-tú dostávame požadované tvrdenie.

Zadania 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Miloša sa pýtali, koľko žiakov je v ich triede. Odpovedal: „Ak zväčšíme počet žiakov našej triedy o 100 % a potom pridáme ešte polovicu počtu žiakov triedy, dostaneme 100.“ Koľko žiakov je v Milošovej triede?

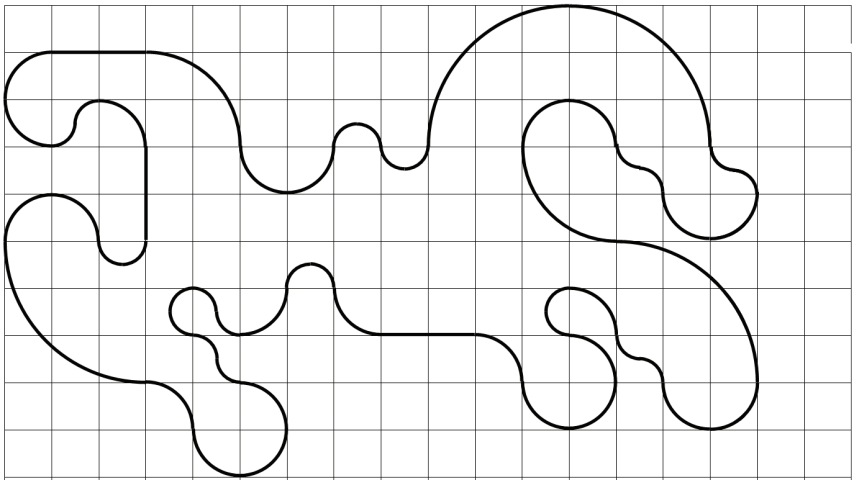
2. Naše digitálne hodinky ukazujú hodiny a minúty (sekundy neukazujú). Koľko času ubehne od polnoci, kým ukážu 23-krát číslicu 2? (Ukázať číslicu znamená, že v danej minúte je zobrazená na hodinkách na jednej zo štyroch pozícií, teda napríklad od 19:59 po 20:10 (vrátane) je dvojka zobrazená 12-krát.)

3. Bazén na kúpalisku je dlhý 50 m a široký 12,5 m. Na pláne mesta je znázornený ako obdĺžnik s obsahom 1 cm^2. Určte, v akej mierke je plán mesta.

4. Aby sme si mohli pripraviť pukance, je potrebné na jar zasiať na polia semená kukurice pukancovej. Jeden kilogram kukuričných zŕn ich obsahuje približne 6 500 kusov. Hustota porastu kukurice je 80 000 rastlín na jeden hektár poľa. Pri siatí treba brať do úvahy aj to, že nie všetky zasadené zrná vyklíčia, takže dobrý poľnohospodár vyseje približne o 15 % zŕn viac oproti očakávanému počtu rastlín. Na siatie kukurice má k dispozícii sejačku, ktorá naraz seje v pásoch širokých 5 metrov. Keďže sa pohybuje po poli, jej priemerná rýchlosť je 4 km/h. Čas potrebný na otáčanie sejačky na konci poľa je už zahrnutý v jej priemernej rýchlosti. Koľko kukurice pukancovej má dobrý poľnohospodár kúpiť, ak chce

zasiať kukuricu na poli s rozmermi 500 metrov x 600 metrov? Koľko hodín bude trvať vysiatie kukurice pomocou sejačky na celé pole?

5. Na obrázku je znázornená pretekárska dráha (jeden štvorček má stranu dlhú 50 metrov), ktorá sa nachádza na rovine (nie je klopená). Vypočítajte dĺžku okruhu v metroch.



6. Aký uhol zviera hodinová a minútová ručička klasických hodín presne o 13:12?

7. Máme k dispozícii dve vedrá. Jedno 17-litrové a druhé 9-litrové a neobmedzený zdroj vody. Dá sa do 17-litrového vedra naplniť presne 13 litrov vody? Ak áno, ako?

8. Číslo 700 245 sa dá rozložiť na súčin troch dvojciferných čísel. Určte tieto tri čísla.

9. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice $xy = 20 - 3x + y$.

10. Šesť družstiev sa zúčastnilo turnaja, ktorý sa hral systémom „každý s každým jeden zápas“. Turnaj trval dva dni. Dokážte, že existujú tri družstvá, ktoré odohrali všetky svoje vzájomné zápasy v jeden deň.

11. Kladné reálne čísla a, b, c majú takú vlastnosť, že pre každé prirodzené číslo n existuje trojuholník so stranami s dĺžkami a^n, b^n, c^n. Dokážte, že aspoň dve z čísel a, b, c sú rovnaké.

12. Určte hodnotu súčtu $f(n)=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2$ pomocou n a konečného počtu operácií.

13. Dokážte, že ak je n nepárne prirodzené číslo, potom číslo $1^n+2^n+\ldots+n^n$ je deliteľné n^2.

14. Nech n a m sú prirodzené čísla, pričom platí $n \geq 2m$. Koľko existuje reťazcov dĺžky n zložených len z núl a jednotiek, ktoré obsahujú práve m blokov 01?

Termín odoslania riešení úloh 3. série: do 4. 6. 2018

Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
M. R. Štefánika 716/29
900 46 Most pri Bratislave

Výsledková listina po 2. sérii úloh korešpondenčnej súťaže

Kategória C

Por.	Priezvisko a meno	Škola	1	2	3	4	Spolu
1	Pokorný Matej	G Žilina	2	2	5	1	10
2	Pacigová Barbora	SOŠ Svit	0	5	0	0	5
3	Pokorný Matej	G Žilina	2	2	5	1	10

Kategória B

Por.	Priezvisko a meno	Škola	3	4	5	6	Spolu
1	Novotný Ján	G Prešov	5	2	0	4	11
2	Kyselová Barbora	SOŠ Svit	5	0	0	4	9
3	Madejová Daniela	SOŠ Svit	5	0	0	4	9
4	Szücsová Radoslava	SOŠ Svit	5	0	0	4	9
5	Irha Michal	SOŠ Svit	3	0	0	0	3
6	Závodský Branislava	G Košice	3	0	0	2	5