Zadania úloh domáceho kola 68. ročníka Matematickej olympiády

Kategória Z5

Z5 – I – 1

Miška má päť pasteliek. Vojto ich má menej ako Miška. Vendelín ich má toľko, koľko Miška a Vojto spolu. Všetci traja spolu majú sedemkrát viac pasteliek, ako má Vojto. Koľko pasteliek má Vendelín? (*Libuše Hozová*)

Z5 – I – 2

Tereza dostala štyri zhodné pravouhlé trojuholníky so stranami dĺžok 3 cm, 4 cm a 5 cm. Z týchto trojuholníkov (nie nutne zo všetkých štyroch) skúšala skladať nové útvary. Postupne sa jej podarilo zložiť štvoruholníky s obvodom 14 cm, 18 cm, 22 cm a 26 cm, a to zakaždým dvoma rôznymi spôsobmi (t. j. tak, že žiadne dva štvoruholníky neboli zhodné). Nakreslite, aké štvoruholníky mohla Tereza zložiť.

(*Lucie Růžičková*)

Z5 – I – 3

Štefka rada oslavuje, takže okrem narodenín vymyslela ešte *antinarodeniny*: dátum antinarodenín vznikne tak, že sa vymení číslo dňa a číslo mesiaca v dátume narodenia. Sama sa narodila 8. 11., takže antinarodeniny má 11. 8. Jej mamička antinarodeniny oslavovať nemôže: narodila sa 23. 7., jej antinarodeniny by mali byť 7. 23., čo ale nie je dátum žiadneho dňa v roku. Jej brat síce antinarodeniny oslavovať môže, ale má ich v ten istý deň ako narodeniny: narodil sa 3. 3. Koľko dní v roku je takých, že človek, ktorý sa toho dňa narodil, môže oslavovať svoje antinarodeniny, a to v iný deň ako svoje narodeniny? (*Veronika Hucíková*)

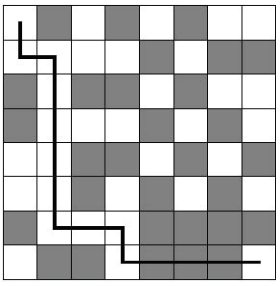
Z5 – I – 4

V novej klubovni boli iba stoličky a stôl. Každá stolička mala štyri nohy, stôl bol trojnohý. Do klubovne prišli skauti. Každý si sadol na svoju stoličku, dve stoličky zostali neobsadené a počet nôh v miestnosti bol 101. Určte, koľko stoličiek bolo v klubovni. (*Libuše Hozová*)

Z5 – I – 5

Tomáš dostal deväť kartičiek, na ktorých boli nasledujúce čísla a matematické symboly: 18, 19, 20, 20, +, −, ×, (,). Kartičky ukladal tak, že vedľa seba nikdy neležali dve kartičky s číslami, t. j. striedali sa kartičky s číslami a kartičky so symbolmi. Takto vzniknuté úlohy vypočítal a výsledok si zapísal. Určte, aký najväčší výsledok mohol Tomáš získať. (*Karel Pazourek*)

Z5 – I – 6



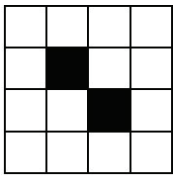
Na obrázku je hrací plánik a cesta, ktorú Juro zamýšľal prejsť z pravého dolného rohu do ľavého horného. Potom zistil, že má plánik chybne pootočený, teda že by nezačínal v pravom dolnom rohu. Tvar zamýšľanej cesty už ale nemohol zmeniť a musel ju prejsť pri správnom natočení plánika. Pre každé z troch možných natočení prekreslite uvedenú cestu a určte, koľkými sivými políčkami táto cesta prechádza. (*Eva Semerádová*)

Kategória Z6

Z6 – I – 1

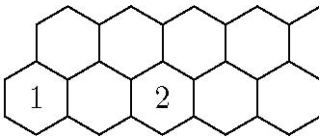
Ivan a Mirka sa delili o hrušky v mise. Ivan si vždy berie dve hrušky a Mirka polovicu toho, čo v mise ostáva. Takto postupne odoberali Ivan, Mirka, Ivan, Mirka a nakoniec Ivan, ktorý vzal posledné dve hrušky. Určte, kto mal nakoniec viac hrušiek a o koľko. (*Monika Dillingerová*)

Z6 – I – 2



Ernest si zo štvorčekového papiera vystrihol štvorec 4 × 4. Kristián v ňom vystrihol dve diery, pozri dva čierne štvorčeky na obrázku. Tento útvar skúšal Ernest rozstrihnúť podľa vyznačených čiar na dve zhodné časti. Nájdite aspoň štyri rôzne spôsoby, ako to mohol Ernest spraviť. (Pritom dve strihania považujte za rôzne, ak časti vzniknuté jedným strihaním nie sú zhodné s časťami vzniknutými druhým strihaním.) (*Alžbeta Bohiniková*)

Z6 – I – 3



Na obrázku sú naznačené dva rady šesťuholníkových políčok, ktoré doprava pokračujú bez obmedzenia. Do každého políčka doplňte jedno kladné celé číslo tak, aby súčin čísel v ľubovoľných troch navzájom susediacich políčkach bol 2018. Určte číslo, ktoré bude v 2019. políčku v hornom rade. (*Lucie Růžičková*)

Z6 – I – 4

Pán Ticháček mal na záhrade troch sadrových trpaslíkov: najväčšieho volal Maško, prostredného Jarko a najmenšieho Fanko. Keďže sa s nimi rád hrával, časom zistil, že keď postaví Fanka na Jarka, sú rovnako vysokí ako Maško. Keď naopak postaví Fanka na Maška, merajú spolu o 34 cm viac ako Jarko. A keď postaví na Maška Jarka, sú o 72 cm vyšší ako Fanko. Ako vysokí sú trpaslíci pána Ticháčka?

(*Michaela Petrová*)

Z6 – I – 5

V nasledujúcom príklade na sčítanie predstavujú rovnaké písmená rovnaké cifry, rôzne písmená rôzne cifry:

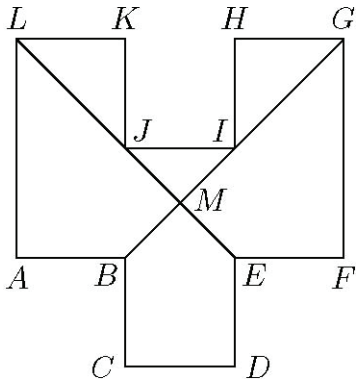
```
  R A T A M
      R A D
-------------
U L O H Y
```

Nahraďte písmená ciframi tak, aby bol príklad správne. Nájdite dve rôzne nahradenia.

(*Erika Novotná*)

Z6 – I – 6

V dvanásťuholníku *ABCDEFGHIJKL* sú každé dve susedné strany navzájom kolmé a všetky strany s výnimkou strán *AL* a *GF* sú navzájom zhodné. Strany *AL* a *GF* sú oproti ostatným stranám dvojnásobne dlhé. Úsečky *BG* a *EL* sa pretínajú v bode *M* a rozdeľujú dvanásťuholník na šesť útvarov (tri trojuholníky, dva štvoruholníky a jeden päťuholník). Štvoruholník *EFGM* má obsah 7 cm^2. Určte obsahy ostatných piatich útvarov. (*Eva Semerádová*)



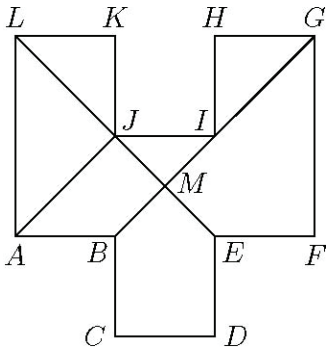
Kategória Z7

Z7 – I – 1

Na každej z troch kartičiek je napísaná jedna cifra rôzna od nuly (na rôznych kartičkách nie sú nutne rôzne cifry). Vieme, že akékoľvek trojciferné číslo zložené z týchto kartičiek je deliteľné šiestimi. Navyše možno z týchto kartičiek zložiť trojciferné číslo deliteľné jedenástimi. Aké cifry môžu byť na kartičkách? Určte všetky možnosti. (*Veronika Hucíková*)

Z7 – I – 2

V dvanásťuholníku *ABCDEFGHIJKL* sú každé dve susedné strany navzájom kolmé a všetky strany s výnimkou strán *AL* a *GF* sú navzájom zhodné. Strany *AL* a *GF* sú oproti ostatným stranám dvojnásobne dlhé. Úsečky *BG* a *EL* sa pretínajú v bode *M*. Štvoruholník *ABMJ* má obsah 1,8 cm^2. Určte obsah štvoruholníka *EFGM*. (*Eva Semerádová*)

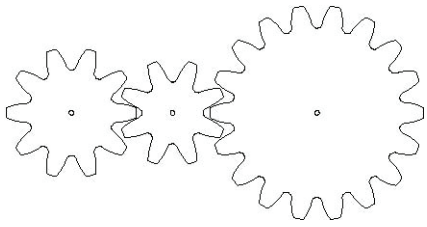


Z7 – I – 3

Dedo pripravil pre svojich šesť vnúčat kôpku lieskových orieškov s tým, nech si ich nejako rozoberú. Prvý prišiel Adam, odpočítal si polovicu, pribral si ešte jeden

oriešok a odišiel. Rovnako sa zachoval druhý Bob, tretí Cyril, štvrtý Dano aj piaty Edo. Iba Ferko smutne hľadel na prázdny stôl; už pre neho žiadny oriešok nezvýšil. Koľko orieškov bolo pôvodne na kôpke? (*Marta Volfová*)

Z7 – I – 4



Betka sa hrala s ozubenými kolesami, ktoré ukladala tak, ako je naznačené na obrázku. Keď potom zatočila jedným okolo, točili sa všetky ostatné. Nakoniec bola spokojná so súkolesím, pričom prvé koleso malo 32 a druhé 24 zubov. Keď sa tretie koleso otočilo presne osemkrát, druhé koleso urobilo päť otáčok a časť šiestej a prvé koleso urobilo štyri otáčky a časť piatej. Zistite, koľko zubov malo tretie koleso. (*Erika Novotná*)

Z7 – I – 5

V záhradníctve Rose si jedna predajňa objednala celkom 120 ruží vo farbe červenej a žltej, druhá predajňa celkom 105 ruží vo farbe červenej a bielej a tretia predajňa celkom 45 ruží vo farbe žltej a bielej. Záhradníctvo zákazku splnilo, a to tak, že ruží rovnakej farby dodalo do každého obchodu rovnako. Koľko celkovo červených, koľko bielych a koľko žltých ruží dodalo záhradníctvo do týchto troch predajní? (*Marta Volfová*)

Z7 – I – 6

Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABS so základňou AB. Na kružnici, ktorá má stred v bode S a prechádza bodmi A a B, leží bod C tak, že trojuholník ABC je rovnoramenný. Určte, koľko bodov C vyhovuje uvedeným podmienkam, a všetky také body zostrojte. (*Karel Pazourek*)

Kategória Z8

Z8 – I – 1

Fero a Dávid sa denne stretávajú vo výťahu. Raz ráno zistili, že keď vynásobia svoje súčasné veky, dostanú 238. Keby to isté urobili za štyri roky, bol by tento súčin 378. Určte súčet súčasných vekov Fera a Dávida. (*Michaela Petrová*)

Z8 – I – 2

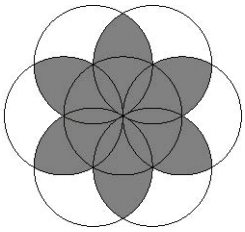
Do triedy pribudol nový žiak, o ktorom sa vedelo, že okrem angličtiny vie výborne ešte jeden cudzí jazyk. Traja spolužiaci sa dohadovali, ktorý jazyk to je.

Prvý súdil: „Francúzština to nie je.“

Druhý hádal: „Je to španielčina alebo nemčina.“

Tretí usudzoval: „Je to španielčina.“
Vzápätí sa dozvedeli, že aspoň jeden z nich hádal správne a aspoň jeden nesprávne. Určte, ktorý z menovaných jazykov nový žiak ovládal. (*Marta Volfová*)

Z8 – I – 3



Peter narysoval pravidelný šesťuholník, ktorého vrcholy ležali na kružnici dĺžky 16 cm. Potom pre každý vrchol tohto šesťuholníka narysoval kružnicu so stredom v tomto vrchole, ktorá prechádzala jeho dvoma susednými vrcholmi. Vznikol tak útvar ako na obrázku. Určte obvod vyznačeného kvietka. (*Erika Novotná*)

Z8 – I – 4

Na štyroch kartičkách boli štyri rôzne cifry, z ktorých jedna bola nula. Vojto z kartičiek zložil čo najväčšie štvorciferné číslo, Martin potom čo najmenšie štvorciferné číslo. Adam zapísal na tabuľu rozdiel Vojtovho a Martinovho čísla. Potom Vojto z kartičiek zložil čo najväčšie trojciferné číslo a Martin čo najmenšie trojciferné číslo. Adam opäť zapísal na tabuľu rozdiel Vojtovho a Martinovho čísla. Potom Vojto s Martinom podobne zložili dvojciferné čísla a Adam zapísal na tabuľu ich rozdiel. Nakoniec Vojto vybral čo najväčšie jednociferné číslo a Martin čo najmenšie nenulové jednociferné číslo a Adam zapísal ich rozdiel. Keď Adam sčítal všetky štyri rozdiely na tabuli, vyšlo mu 9090. Určte štyri cifry na kartičkách.

(*Lucie Růžičková*)

Z8 – I – 5

Kráľ dal murárovi Václavovi za úlohu postaviť múr hrubý 25 cm, dlhý 50 m a vysoký 2 m. Ak by Václav pracoval bez prestávky a rovnakým tempom, postavil by múr za 26 hodín. Podľa platných kráľovských nariadení však musí Václav dodržiavať nasledujúce podmienky:

- Počas práce musí spraviť práve šesť polhodinových prestávok.
- Na začiatku práce a po každej polhodinovej prestávke, keď je dostatočne oddýchnutý, môže pracovať o štvrtinu rýchlejšie ako normálnym tempom, ale nie dlhšie ako jednu hodinu.
- Medzi prestávkami musí pracovať najmenej 3/4 hodiny.

Za aký najkratší čas môže Václav splniť zadanú úlohu? (*Jakub Norek*)

Z8 – I – 6

V lichobežníku *KLMN* má základňa *KL* veľkosť 40 cm a základňa *MN* má veľkosť 16 cm. Bod *P* leží na úsečke *KL* tak, že úsečka *NP* rozdeľuje lichobežník na dve časti s rovnakými obsahmi. Určte veľkosť úsečky *KP*. (*Libuše Hozová*)

Kategória Z9

Z9 – I – 1

Nájdite všetky kladné celé čísla x a y, pre ktoré platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

(*Alžbeta Bohiniková*)

Z9 – I – 2

V rovnostrannom trojuholníku ABC je K stredom strany AB, bod L leží v tretine strany BC bližšie bodu C a bod M leží v tretine strany AC bližšie bodu A. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník KLM. (*Lucie Růžičková*)

Z9 – I – 3

V našom meste sú tri kiná, ktorým sa hovorí podľa svetových strán. O ich otváracích hodinách je známe, že:

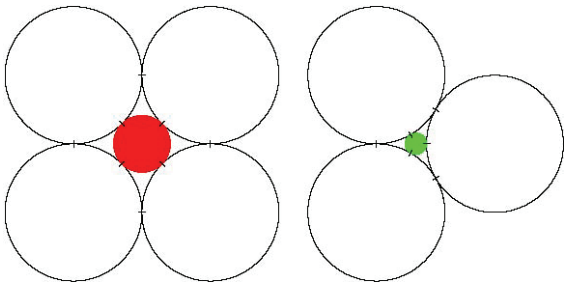
- každý deň je otvorené aspoň jedno kino,
- ak je otvorené južné kino, tak nie je otvorené severné kino,
- nikdy nie je otvorené súčasne severné a východné kino,
- ak je otvorené východné kino, tak je otvorené aj južné alebo severné kino.

Vydali sme sa do južného kina a zistili sme, že je zatvorené. Ktoré zo zvyšných kín je určite otvorené? (*Monika Dillingerová*)

Z9 – I – 4

Hotelier chcel vybaviť jedáleň novými stoličkami. V katalógu si vybral typ stoličky. Až pri zadávaní objednávky sa od výrobcu dozvedel, že v rámci zľavovej akcie ponúkajú každú štvrtú stoličku za polovičnú cenu a že teda oproti plánu môže ušetriť za sedem a pol stoličky. Hotelier si spočítal, že za pôvodne plánovanú čiastku môže zaobstarať o deväť stoličiek viac, ako zamýšľal. Koľko stoličiek chcel hotelier pôvodne kúpiť? (*Libor Šimůnek*)

Z9 – I – 5



Adam a Eva vytvárali dekorácie z navzájom zhodných bielych kruhov. Adam použil štyri kruhy, ktoré položil tak, že sa každý dotýkal dvoch iných kruhov. Medzi ne potom vložil iný kruh, ktorý sa dotýkal všetkých štyroch bielych kruhov, a ten vyfarbil červenou. Eva použila tri kruhy, ktoré položila tak, že sa dotýkali navzájom. Medzi ne potom vložila iný kruh, ktorý sa dotýkal všetkých troch bielych kruhov, a ten vyfarbila zelenou. Eva

si všimla, že jej zelený kruh a Adamov červený kruh sú rôzne veľké, a začali spolu zisťovať, ako sa líšia. Vyjadrite polomery červeného a zeleného kruhu všeobecne pomocou polomeru bielych kruhov. (*Marie Krejčová*)

Z9 – I – 6

Prirodzené číslo N nazveme bombastické, ak neobsahuje vo svojom zápise žiadnu nulu a ak žiadne menšie prirodzené číslo nemá rovnaký súčin cifier ako číslo N. Karol sa najskôr zaujímal o bombastické prvočísla a tvrdil, že ich nie je veľa. Vypíšte všetky dvojciferné bombastické prvočísla. Potom Karol zvolil jedno bombastické číslo a prezradil nám, že obsahuje cifru 3 a že iba jedna z jeho ďalších cifier je párna. O ktorú párnu cifru sa mohlo jednať? (*Michal Rolínek*)

Kategória C

C – I – 1

Neznáme číslo je deliteľné práve štyrmi číslami z množiny {6, 15, 20, 21, 70}. Určte, ktorými. (*Michal Rolínek*)

C – I – 2

Na strane AB trojuholníka ABC sú dané body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B sú postupne stredmi úsečiek CF a CG. Priamka CD pretína priamku FB v bode I a priamka CE pretína priamku AG v bode J. Dokážte, že priesečník priamok AI a BJ leží na priamke FG. (*Pavel Calábek*)

C – I – 3

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčet je 3, a každé z nich je nanajvýš 2. Dokážte, že platí nerovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9$. (*Patrik Bak*)

C – I – 4

Každé políčko tabuľky 2 × 13 ofarbíme práve jednou zo štyroch farieb. Koľkými spôsobmi to možno spraviť tak, aby žiadne dve susedné políčka neboli ofarbené rovnakou farbou? (Za susedné považujeme práve tie políčka tabuľky, ktoré majú spoločnú stranu.) (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 5

Nech α, β, γ, δ, ε, ϕ, ψ, ω sú postupne veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C, D, E, F , G, H konvexného osemuholníka $ABCDEFGH$, v ktorom platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \phi = \psi + \omega.$$

Označme ďalej K, L, M, N postupne stredy uhlopriečok AD, CF, EH, GB. Dokážte, že priamky KM a LN sú navzájom kolmé. (*Josef Tkadlec*)

C – I – 6

Nájdite všetky trojciferné čísla n s tromi rôznymi nenulovými ciframi, ktoré sú deliteľné súčtom všetkých troch dvojciferných čísel, ktoré dostaneme, keď v pôvodnom čísle vyškrtneme vždy jednu cifru. (*Jaromír Šimša*)

Kategória B

B – I – 1

Nájdite všetky osemciferné čísla také, z ktorých po vyškrtnutí niektorej štvorice susedných cifier dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je 2019-krát menšie.

(*Pavel Calábek*)

B – I – 2

V trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M stred prepony BC a N priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole B s odvesnou AC. Úsečky AM a BN sa pretínajú v bode, ktorý označme K. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka BAK a štvoruholníka $CNKM$. (*Patrik Bak*)

B – I – 3

Úpravou prirodzeného čísla nazveme nasledujúcu operáciu: ak je číslo párne, vydelíme ho dvoma; ak je nepárne, pripočítame k nemu číslo 1.

a) Dokážte, že z ľubovoľného prirodzeného čísla dostaneme po niekoľkých úpravách číslo 1.
b) Pre ktoré z čísel 1, 2, ..., 10^6 budeme potrebovať najväčší počet úprav, kým získame číslo 1? (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Pre nezáporné reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$ (*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $AD \perp BD$. Označme M priesečník jeho uhlopriečok a zostrojme kolmý priemet P bodu M na priamku AB a kolmý priemet Q bodu B na priamku AC. Dokážte, že bod M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku PQD. (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Konečnú množinu prirodzených čísel nazveme *pekná*, ak na výpis týchto čísel v desiatkovej sústave potrebujeme párny počet každej zo zastúpených cifier. Peknými množinami sú napríklad {11, 13, 31}, {10, 100, 110} a tiež prázdna množina. Určte, koľko je všetkých pekných podmnožín množiny {1, 2, ..., 2 018}. (*Patrik Bak*)

Kategória A

A – I – 1

O postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vieme, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Nájdite všetky hodnoty a_1, pre ktoré je táto postupnosť konštantná.

b) Nech $a_1 = 5$. Určte najväčšie celé číslo neprevyšujúce a_{2018}. (*Vojtech Bálint*)

A – I – 2

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme D pätu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových súmernostiach postupne podľa priamok AB, AC. Ďalej označme E_1 a E_2 body na priamke BC také, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokážte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 ležia na jednej kružnici, ktorej stred leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. (*Patrik Bak*)

A – I – 3

Nájdite všetky nezáporné celé čísla m, n, pre ktoré platí $\left|4m^2 - n^{n+1}\right| \leq 3$.

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 4

Daná je množina M prirodzených čísel s n prvkami, pričom n je nepárne číslo väčšie ako jedna. Dokážte, že počet usporiadaných dvojíc (p, q) rôznych prvkov z M takých, že aritmetický priemer čísel p, q je prvkom M, je nanajvýš $\frac{1}{2}(n-1)^2$.

(*Martin Panák, Patrik Bak*)

A – I – 5

Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte jeho obvod o, polomer ρ kružnice pripísanej ku strane BC a veľkosť výšky v na túto stranu. Uveďte diskusiu v závislosti od daných dĺžok. (*Patrik Bak*)

A – I – 6

Na hracom pláne je nakreslený pravidelný n-uholník s jedným vrcholom vyznačeným ako pasca. Tom a Jerry hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku Jerry postaví figúrku na niektorý vrchol n-uholníka. V každom kroku potom Tom povie nejaké prirodzené číslo a Jerry posunie figúrku o tento počet vrcholov podľa svojej voľby buď v smere, alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek. Nájdite všetky $n \geq 3$, pri ktorých môže Jerry ťahať figúrkou tak, aby nikdy neskončila v pasci. Ako sa zmení odpoveď, keď je Tom k plánu otočený chrbtom, pozná iba dané n a nevidí, kam Jerry figúrku na začiatku postaví ani kam s ňou v jednotlivých krokoch ťahá? (*Pavel Calábek*)

Výlet

Trieda, v ktorej je 16 chlapcov a 14 dievčat, sa rozhodla ísť na výlet. Našli ubytovanie v hoteli, v ktorom sú k dispozícii len dvojlôžkové a trojlôžkové izby. Cena za ubytovanie v dvojlôžkovej izbe je 30 €/izba/noc a v trojlôžkovej 42 €/izba/noc. Vzhľadom na to, že ide o školský výlet, pocestujú s nimi aj dve učiteľky. Školské pravidlá ďalej stanovujú, že na izbe môžu bývať len osoby rovnakého pohlavia a učitelia nesmú bývať so žiakmi na jednej izbe.

a) Koľkými rôznymi spôsobmi si môžu objednať ubytovanie v hoteli, ak požadujeme, aby boli všetky izby naplnené podľa ich kapacity? (V objednávke sa uvádza počet objednávaných dvojlôžkových a trojlôžkových izieb.)

b) Aký je minimálny počet izieb, ktoré sú potrebné na ubytovanie celej triedy a učiteliek?

c) Určte celkové náklady na výlet, ak sa ubytujú tak, aby boli celkové náklady čo najnižšie.

Riešenie: a) Dievčatá môžu bývať buď na 7 dvojlôžkových, alebo štyroch dvojlôžkových a dvoch trojlôžkových, alebo jednej dvojlôžkovej a štyroch trojlôžkových izbách. Chlapci môžu bývať na 8 dvojlôžkových, alebo 5 dvojlôžkových a dvoch trojlôžkových, alebo dvoch dvojlôžkových a štyroch trojlôžkových izbách. Učiteľky môžu bývať len na jednej dvojlôžkovej izbe. Skombinovaním vyššie uvedených možností dostávame, že ubytovaní môžu byť na