Zadania súťažných úloh

Matboj MATMIX-u, Prešov 15. 2. 2007

1. Zistite, či existuje dvanásťuholník, ktorý má 8 vnútorných uhlov pravých. Ak áno, nájdite ho, ak nie, dokážte, že neexistuje.

2. Do výrazu $23 + 9 : 3 - 5 \cdot 7$ doplňte zátvorky tak, aby ste dostali nasledujúci výsledok:
a) 9
b) -9

3. Zistite, koľkými nulami končí číslo 2007!.

4. V triede je menej než 50 detí. Chlapcov je 72% z počtu dievčat. Koľko detí môže byť v triede?

5. Keď mal Jankov otec 31 rokov, Janko mal 8 rokov. Dnes je jeho otec dvakrát taký starý ako on. Koľko rokov má Janko?

6. Dvaja kamaráti majú hodinky, ktoré jednému meškajú 30 sekúnd denne a hodinky druhého získajú 30 sekúnd náskok. Dnes o 12.00 si kamaráti nastavili presný čas. Kedy budú ukazovať hodinky oboch kamarátov rovnaký čas a aký čas na nich bude?

7. V prvej skupine lietadiel letelo jedno pred dvoma, iné medzi dvoma a ďalšie za dvoma. V druhej skupine leteli tri pred troma, jedno medzi dvoma, jedno medzi piatimi, jedno za troma, jedno pred dvoma, dve za štyrmi a dve za jedným. Koľko bolo v každej skupine lietadiel?

8. Nájdite číslo, ktorého tri štvrtiny sú o 2 menšie než dve pätiny jeho dvojnásobku.

9. Určte počet všetkých dvojciferných čísel, ktorých druhá mocnina sa končí jednotkou.

10. V miestnosti sa nachádza niekoľko mačiek. Určte ich počet, ak viete, že v každom zo štyroch rohov sedí jedna mačka, oproti nej sedia 3 mačky a na chvoste každej z nich sedí jedna mačka.

11. Pri voľbách dostali štyria kandidáti 5 219 hlasov. Víťaz predstihol protivníkov o 22, 30 a 73 hlasov. Koľko hlasov získal ktorý?

12. Vandal vytrhol z knihy jednu stránku. Súčet čísel strán na zvyšných stranách sa rovná 10 000. Koľko strán mala pôvodne kniha a ktorú stránku vandal vytrhol?

13. Pridajte k dvojnásobku hodín, ktoré prešli od poludnia, tretinu počtu hodín, ktoré prejdú od tejto chvíle k zajtrajšiemu poludniu, a dostanete, koľko je hodín. Koľko je hodín?

14. Zo štyroch kratších paličiek (dlhých 10 cm) a štyroch dlhších paličiek (dlhých 20 cm) zložte tri rovnako veľké štvorce. Paličky nesmiete lámať ani ohýbať.

15. Súčet trojnásobku čísla zväčšeného o tri a dvojnásobku toho istého čísla zmenšeného o 1 sa rovná trojnásobku toho istého čísla zväčšenému o 5. Určte toto číslo.

16. Na lúke sa pasú kone, ovce a husi. Oviec je viac než husí. Ovce a husi majú spolu 100 nôh a hláv. Husí a oviec je trikrát viac než koní. Koľko koní sa pasie na lúke?

17. Na večierku sa zúčastnil istý počet mužov. Žien bolo o tretinu menej. Po polnoci odišlo šesť manželských párov a zostalo tam trikrát toľko mužov ako žien. Koľko mužov a koľko žien bolo pôvodne na večierku?

18. Nájdite všetky riešenia rovnice

$$\frac{x+7}{1999}+\frac{x+5}{2001}+\frac{x+3}{2003}=\frac{x+1999}{7}+\frac{x+2001}{5}+\frac{x+2003}{3}.$$

19. Rôzne písmená nahraďte rôznymi číslicami, aby platilo naznačené násobenie:

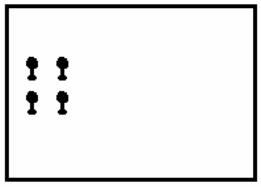
$$ABC\cdot DEF=123\ 456\ .$$

Určte hodnotu súčtu $ABC+DEF$.

20. Ako odmeriate 15 minút pomocou dvoch presýpacích hodín, pomocou ktorých sa dá odmerať 7 minút, resp. 11 minút a ktoré môžete dokopy obrátiť len trikrát?

21. Keď šiel Peter popri koľajniciach, spozoroval, že električka ho doháňa každých 12 minút a že stretá električku každé 4 minúty. Predpokladajme, že sa električky aj Peter pohybujú rovnomernou rýchlosťou. V akých časových intervaloch opúšťajú električky svoje východiskové stanice?

22. V tejto záhrade sú štyri stromy. Rozdeľte ju na štyri časti rovnaké tvarom aj veľkosťou, aby v každej časti bol jeden strom.



23. Na kŕmenie 31 sliepok si na farme urobili zásoby krmiva v množstve po 10 litrov na sliepku týždenne. Pritom počítali, že počet sliepok sa nebude meniť. V skutočnosti však na konci každého týždňa zabili jednu sliepku, takže krmivo vystačilo na dvojnásobný čas. Aká bola zásoba krmiva a na aký čas ju pôvodne vypočítali?

24. Je daný obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami strán. Ak zväčšíme jednu jeho stranu o 4 a druhú o 5, dostaneme obdĺžnik s dvojnásobným obsahom. Určte strany daného obdĺžnika. Nájdite všetky možnosti.

25. Ak pôjdem pešo rýchlosťou 6 km/h, prídem k vlaku o hodinu neskôr. Ak pôjdem na bicykli rýchlosťou 12 km/h, prídem hodinu pred odchodom vlaku. Štartujem napoludnie. Ako ďaleko je stanica? Kedy odchádza vlak?

26. Číslo 45 máme rozdeliť na štyri časti. Keď k prvej pripočítame 2, od druhej odpočítame 2, tretiu vydelíme 2 a štvrtú vynásobíme 2, vzniká vždy ten istý výsledok. Ako rozdelíme číslo 45?

27. Obdĺžniková čokoláda je čiarami rozdelená na 5x8 štvorčekov. Dvaja hráči striedavo rozlamujú jednotlivé kúsky čokolády pozdĺž čiar (kúsok 1x1 sa už nedá ďalej lámať). Hru vyhráva ten hráč, ktorý rozlomí posledný lámateľný kúsok čokolády (teda jeho súper už nemá možnosť lámať žiaden kúsok čokolády). Zistite, ktorý z hráčov vyhrá, ak obaja hrajú najlepšie, ako vedia.

28. Traja spolužiaci si kúpili knihu. Čiastka, ktorú každý z nich dal, neprevyšovala polovicu čiastky, ktorú dali ostatní dvaja spolu. Koľko zaplatil každý z nich, ak kniha stála 651 Sk?

29. Určte šesťciferné číslo, ak o ňom viete, že ak ho rozdelíte na tri dvojciferné čísla, bude platiť, že druhé číslo sprava je trikrát väčšie než prvé sprava, tretie sprava je dvakrát väčšie než druhé sprava a pritom všetkých šesť číslic je rôznych.

30. Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel takých, že ich druhá aj tretia mocnina končia na tú istú číslicu?

31. Určte všetky trojciferné čísla *ABC*, ktoré sa rovnajú súčtu dvojciferných čísel *AB*, *AC*, *BA*, *BC*, *CA* a *CB*.

32. Zistite, či sa dá do štvorčekovej siete (jeden štvorček je 1x1 cm) nakresliť rovnobežník s vrcholmi v mrežových bodoch, ak chceme, aby mal obsah 27,5 cm^2.

33. Vlak pohybujúci sa konštantnou rýchlosťou prešiel okolo semafora za 5 sekúnd, cez nástupište dlhé 150 metrov za 15 sekúnd. Zistite dĺžku vlaku a jeho rýchlosť.

34. V rodine je 9 synov. Narodili sa v pravidelných intervaloch, každý rok maximálne jeden, a súčet druhých mocnín ich vekov sa rovná druhej mocnine veku otca. Určte vek otca a detí.

35. Riešte rovnicu

$$x^2 + 4 = 4x \sin \frac{\pi x}{4}.$$

36. Nájdite také celé číslo y a prvočísla p, q menšie ako 100, pre ktoré platí

$$1999 = 86y + p - q.$$

37. Na dvore sú 3 sliepky, 4 kačky a 2 husi. Koľko existuje možností pre výber takých skupín hydiny, v ktorých sa vyskytuje aspoň jedna sliepka, aspoň jedna kačka a aspoň jedna hus, ak zvieratá rozlišujeme aj v rámci druhu?

38. Rôzne písmená nahraďte rôznymi číslicami, aby platili naznačené operácie:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & D & O & + & R & E & = & M & I \\ & & F & A & + & S & I & = & L & A \\ R & E & + & S & I & + & L & A & = & S & O & L \end{array}$$

Nájdite všetky riešenia.

39. Dokážte, že ak je a prirodzené číslo rôzne od 1, tak každé číslo tvaru $a^4 + 4$ je zložené.

40. Určte (bez použitia kalkulačky), ktoré z nasledujúcich dvoch čísel je väčšie:

$$\sqrt{7} + \sqrt{10}, \ \sqrt{3} + \sqrt{19}.$$

41. Bod P leží vnútri štvorca $ABCD$ a platí: $|AP| = 1$, $|BP| = 2$ a $|CP| = 3$. Zistite vzdialenosť $|DP|$.

42. Anička a Katarína svoje narodeniny oslavujú spolu. O tri roky bude Anička štyrikrát staršia, ako bola Katarína vtedy, keď bola Anička o dva roky staršia, ako je Katarína teraz. Určte, koľko rokov má Anička, ak viete, že Katarína je žiačkou štvorročného gymnázia.